Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 95. Die Taylor`sche und die Mac Laurin`sche Reihe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

12. $\dfrac{d\,\mathrm{tg}\,x}{d\,x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ (= \sec^2 x)$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

13. $\dfrac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{d\,x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ (= -\,\mathrm{cosec}^2\,x).$

---

14. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\sin x}{d\,x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\cos x}{d\,x} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\,x}{d\,x} = \dfrac{1}{1+x^2}$

17. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\,x}{d\,x} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

18. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\sec x}{d\,x} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

19. $\dfrac{d\,\mathrm{arc}\,\mathrm{cosec}\,x}{d\,x} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

§ 95. Die Taylor'sche und die Mac Laurin'sche Reihe.

1. Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\mu h),$$

wofern μ positiv und < 1, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots.$ endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endich und stetig für alle Werte zwischen x und $x+h$.

Andere Formen des Restgliedes:

$$\frac{h^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\Theta h),\ \Theta \text{ echter Bruch;}$$

$$\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x)\right]$$

Für $x=a$ und $h=a-x$ ergiebt sich:

$$2.\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(a+\mu(x-a)\big).$$

Hiebei muss $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a=0$ ergiebt sich:

3. Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern $f(x)$ und seine Ableitungen für $x=0$ endlich und stetig bleiben.

Andere Form des Restgliedes:

$$\frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\Theta x).$$

Wird $f(x)$ oder eine seiner Ableitungen für $x=0$ unendlich oder unstetig, so kann $f(x)$ nicht mehr vermittelst der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden. In diesem Fall ist 2. anzuwenden.

4. Taylor's Reihe für zwei Veränderliche.

$$x+ht=p,\ y+kt=q,\ f(p,q)=U,\ f(x,y)=u,$$

$$f(x+h,\ y+k)=u+\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(2)}$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(3)}+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}+R.$$

(s. § 93 11.)

$$R=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\delta U}{\delta p}h+\frac{\delta U}{\delta q}k\right)^{(n)}-\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}\right],$$
$$(p=x+\Theta h,\ q=y+\Theta k).$$