Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty - \infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ den Wert $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an,

so ist $$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $\varphi^{(n+1)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{\varphi^{(n+1)}(a)}$$

2. Ist $f(x) \cdot \varphi(x) = 0 \cdot \infty$ für $x = a$, so ist:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergiebt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $(f(x))^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setzt man $(f\,x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\, l\, f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x)\, l f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muss man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a + h$ setzen, den Ausdruck umformen und wenn möglich, vereinfachen, worauf sich für $h = 0$ der gesuchte Wert ergeben kann.

5. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte

Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermassen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}$$

Der Wert hiefür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

§ 97. Grösste und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein **Maximum**, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
„ **Minimum**, „ $f(a \pm h) - f(a) > 0$,
wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.

2. Bei zunehmendem x ist
$f(x)$ **wachsend**, wenn $f'(x) > 0$,
$f(x)$ **abnehmend**, „ $f'(x) < 0$.

3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein **Maximum**, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
„ **Minimum**, „ $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;
allgemein: die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$ ein Maximum, wenn die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ von gerader Ordnung und negativ, ein Minimum, wenn dieselbe positiv ist.

Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster), so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich null gesetzt und nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob