UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 100. Allgemeine Formeln ; Integrationsweisen entwickelter Funktionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Visual Library

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{arc} \cos x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arc} \sin \frac{bx}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{bx}{a}.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{bx}{a}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\operatorname{arc} \sin (1-x).$

§ 100. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen.

Es seien u, v, w .... Funktionen von x; A, B... konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$\int (Au + Bv + Cw + \ldots) dx = A\int u\,dx + B\int v\,dx + C\int w\,dx + \ldots$

2. Teilweise Integration.

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du \text{ und}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Beispiel:

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2\,d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$$

$$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d \cos x = -x \cos x + \int \cos dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C, \text{ also}$$

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x = \varphi(z)$, dann ist $dx = \varphi'(z)\,dz$,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x} + b = z$, dann ergiebt sich

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\,dz;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$$z = a + bx; \quad z = a + bx^2; \quad z = \frac{a}{x} + b.$$

$$z = \frac{a+bx}{a-bx}, \quad \text{oder } x = \frac{a}{b} \cdot \frac{z-1}{z+1};$$

$$\sqrt[m]{a+bx} = z, \quad \text{oder } x = \frac{z^m - a}{b}\, x\,dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1}\,dz;$$

$$\sin x = z \text{ und } dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ lässt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere lässt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1. Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots.$$

hiebei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \; B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots.$$

2. $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p + qi$ und $p - qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-p-qi} + \frac{A_2}{x-p+qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hiebei ist

$$A_1 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)}, \; A_2 = \frac{(f(p-qi)}{F'(p-qi)}.$$

Fasst man nach der Bestimmung von A_1 und A_2 die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x-p)^2 + q^2$.

3. Mehrfache Wurzeln. Es sei

$$F(x) = 0 = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots., \text{ dann ist}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots. + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots. + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $F(x) = (x-a)^\alpha \cdot \varphi(x)$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}, \text{ woraus}$$

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)};$$

durch Anwendung desselben Verfahrens auf den Bruch $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$ erhält man A_1 u. s. f.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergiebt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § 101,1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = C + x f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 101. Bestimmte Integrale.

1. Ist f(x) dx das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von f(x) dx; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für x = a und x = b. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der