Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 101. Bestimmte Integrale.

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergiebt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § 101,1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = C + x f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 101. Bestimmte Integrale.

1. Ist $f(x)\,dx$ das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für x = a und x = b. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials $f(x)\,dx$, wenn x durch unendlich kleine Aenderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left\{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right\} . h.$$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. $\int_a^b [f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$

c und d Werte zwischen a und b.

5. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$\varphi(x) < f(x)$, desgleichen für eine zweite $\psi(x)$

$\psi(x) > f(x)$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen x_0 und x_{2n} in $2n$ gleiche Teile von der Länge h, und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_{2n})$$

(s. auch § 102_{10}).

6. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei Grenzen a und b, die von m unabhängig sind integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m, so dass also

$\int_a^b f(x, m)\,dx = \varphi(m)$, daher

$$\int_a^b \left[f(x,0)+f(x,1)+f(x,2)+\ldots+f(x,n-1)\right] dx$$
$$=\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n-1).$$

Lässt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals.*)

7. Besondere bestimmte Integrale

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\pi$$

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

4. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4.6\ldots..2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx=\frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4.6\ldots..2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx;\ 2n>0$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{2.4.6\ldots..2n}{1.3.5\ldots..(2n+1)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx=\frac{2.4.6\ldots..2n}{1.3\ldots..(2n+1)}$$
$$=\int_,^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx;\ 2n+1>1$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2};\ a>0$$

*) Siehe Schlœmilch, Uebgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\,x}{x}\,d\,x = \infty$$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,d\,x = 1;\ \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,d\,x = \frac{n!}{a^{n+1}}$ (a > 0, n ganze Zahl.)

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 102[4]):

$$\sin\tau = \frac{d\,y}{d\,s},\ \cos\tau = \frac{d\,x}{d\,s},\ \operatorname{tg}\tau = \frac{d\,y}{d\,x} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 97_3).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben y' ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2 y}{d\,x^2} = 0$, während $\frac{d^3 y}{d\,x^3} \lessgtr 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von y' ergeben $\left(\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \frac{\delta F}{\delta y} = 0\right)$.