Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 102. Ebene Kurven.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos a x}{x}\,d x=\infty$$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} d x=1;\ \int_0^{\infty} e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} d x=\frac{n!}{a^{n+1}}$ ($a > 0$, n ganze Zahl.)

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y=f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 102[4]):

$$\sin\tau=\frac{dy}{ds},\ \cos\tau=\frac{dx}{ds},\ \operatorname{tg}\tau=\frac{dy}{dx}=y'.$$

Wenn $y'=0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y'=\infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 97_3).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben y' ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, während $\frac{d^3y}{dx^3}\gtrless 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von y' ergeben $\left(\frac{\delta F}{\delta x}=0, \frac{\delta F}{\delta y}=0\right)$.

Werden dieselben imaginär, so ist der Punkt **ein isolierter** Punkt; giebt es für y' zusammenfallende Werte, so ist der Punkt ein **Rückkehrpunkt**. In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. **Längen.**

Bogenelement $ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$.

ds muss bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $\operatorname{tg}\tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die Xaxe in T, bezw. in U, dann ist:

$$\text{Tangente PT} = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y}{y'}$$

$$\text{Normale PU} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subnormale} = yy'.$$

5. **Gleichung der**

Tangente im Punkt (x, y), (ξ, η) die laufenden Koordinaten der Tangente,

$$\eta - y = y'(\xi - x), \text{ oder } \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) = 0.$$

Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x), \text{oder } \frac{\delta F}{\delta y}(\xi - x) - \frac{\delta F}{\delta x}(\eta - y) = 0.$$

Asymptote

$y = mx + b$, wobei

$$m = \lim \frac{y}{x}\Big|_{x=\infty} = \lim \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty} = \lim y'\Big|_{x=\infty}$$

$$b = \lim (y - xy')_{x=\infty}.$$

6. **Berührung von Kurven.** Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte eine **Berührung nter Ordnung,**

wenn sie in diesem Punkte $n+1$ zusammenfallende (unendlich nahe) Punkte gemeinschaftlich haben, dies ist der Fall, wenn für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur nten einschl. einander gleich sind. Eine Gerade bildet mit einer Kurve $y=f(x)$ eine Berührung nter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur nten verschwinden und $f'(x)=\varphi'(x)$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit oder ohne Schneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

7. Krümmungskreis. Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich, also eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat, der Mittelpunkt desselben, der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier unendlicher naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Kordinaten (ξ, η) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen

1. $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$
2. $(x-\xi)+(y-\eta)\cdot y'=0$
3. $1+y'^2+(y-\eta)y''=0$, hieraus ergiebt sich

Krümmungshalbmesser $\varrho=\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}:y''$

($\pm$ je nachdem $y'' \gtrless 0$)

$$\begin{cases} \xi=x-(1+y'^2)\cdot y':y'' \\ \eta=y+(1+y'^2):y'' \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x=\varphi(t)$ und $y=\psi(t)$, so ist

$$\varrho=(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}:(x'y''-x''y')$$

$$\begin{cases} \xi=x-y'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y') \\ \eta=y+x'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y'). \end{cases}$$

8. Die Evolute einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für ξ und η in Nr. 7 unter Benützung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heisst Evolvente. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

9. Hüllkurven. Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergiebt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$1.\quad F(x, y, p) = 0 \text{ und}$$

$$2.\quad \frac{\delta F}{\delta p} = 0.$$

10. Flächeninhalt (Quadratur). Der Inhalt der Fläche, welche zwischen der Kurve, der Xaxe und den zu den Abscissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergiebt sich aus

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Simpsonsche Regel. Ist f(x) höchstens vom 3. Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1 dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \frac{1}{6}(x_1 - x_0)(y_0 + 4y_m + y_1).$$

(s. auch § 101_5).

Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines

Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

11. Polarkoordinaten. Gleichung der Kurve:

$$F(r, \varphi) = 0 \text{ oder } r = f(\varphi).$$

Winkel ψ der Tangente (Richtung im Sinn des wachsenden φ) mit dem Strahl r:

$$\sin\psi = \frac{r\,d\varphi}{ds} = \frac{r}{s'},\ \cos\psi = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{s'},\ \operatorname{tg}\psi = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

Bogenelement:

$$ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2} = \pm\sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi.$$

(ds ist bei der Bestimmung von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ mit dem $\operatorname{tg}\psi$ entsprechenden Vorzeichen zu nehmen.)

Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r r'' + 2 r'^2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\, d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\,.\,d\varphi = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,.\,dr.$$

§ 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases} \text{ (Schnittlinie der Flächen.)}$$

$$\text{oder } \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x). \end{cases} \text{ (Projektionen der Kurve.)}$$