# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

**Bürklen, O. Th.**

**Leipzig, 1896**

§ 103. Raumkurven ( doppelt gekrümmte Kurven ).

Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen $x_0$ und $x_1$ liegt, ist

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

11. Polarkoordinaten. Gleichung der Kurve:

$$F(r,\varphi)=0 \text{ oder } r=f(\varphi).$$

Winkel $\psi$ der Tangente (Richtung im Sinn des wachsenden $\varphi$) mit dem Strahl r:

$$\sin\psi=\frac{r\,d\varphi}{ds}=\frac{r}{s'},\ \cos\psi=\frac{dr}{ds}=\frac{r'}{s'},\ \operatorname{tg}\psi=\frac{r\,d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'}.$$

Bogenelement:

$$ds=\pm\sqrt{dr^2+r^2\,d\varphi^2}=\pm\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi.$$

(ds ist bei der Bestimmung von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ mit dem $\operatorname{tg}\psi$ entsprechenden Vorzeichen zu nehmen.)

Krümmungshalbmesser:

$$\varrho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2-r\,r''+2r'^2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und den zu $\varphi_0$ und $\varphi_1$ gehörigen Strahlen

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\,d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r'^2+r^2}\,.\,d\varphi=\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,.\,dr.$$

## § 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{cases} \text{ oder } \begin{cases} f(x,y,z)=0\\ F(x,y,z)=0.\end{cases}$$ (Schnittlinie der Flächen.)

$$\text{oder } \begin{cases} y=\varphi_1(x)\\ z=\varphi_2(x).\end{cases}$$ (Projektionen der Kurve.)

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \,.\, dx.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - \chi(t)}{\chi'(t)}, \text{ oder}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x}(\xi - x) + \dfrac{\delta f}{\delta y}(\eta - y) + \dfrac{\delta f}{\delta z}(\zeta - z) = 0, \\ \dfrac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \dfrac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) + \dfrac{\delta F}{\delta z}(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Tangente mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt(x, y, z)

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \text{ oder}$$

$$[\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) + [\zeta - \chi(t)]\,\chi'(t) = 0.$$

5. Gleichung der Schmiegungsebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt (x, y, z) und zwei unendlich nahe Punkte)

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = dy\,d^2z - d^2y\,dz,\ B = dz\,d^2x - d^2z\,dx,\ C = dx\,d^2y - d^2x\,dy.$$

Normale zur Schmiegungsebene:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ dieser Normalen mit den Axen sind bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D}, \text{ wobei}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{\xi - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten

$$d\tau = \frac{D}{ds^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta = y + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta = z + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung versteht man

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}.$$

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungsebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung der Kurve

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

### § 104. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0, \text{ oder entwickelt}$$
$$z = f(x, y).$$

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q; \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x \, \delta y} = s, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(\xi - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta F}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta F}{\delta z} = 0, \text{ oder}$$
$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\delta F}{\delta z}} \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{N}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{N}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{N}, \text{ bezw.}$$

$$\cos\lambda = \frac{p}{n}, \quad \cos\mu = \frac{q}{n}, \quad \cos\nu = -\frac{1}{n}, \text{ wobei}$$

$$N^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z}\right)^2 \text{ und}$$
$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$