Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 104. Krumme Flächen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

§ 104. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0, \text{ oder entwickelt}$$
$$z = f(x, y).$$

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q; \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = s, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(\xi - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta F}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta F}{\delta z} = 0, \text{ oder}$$
$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\delta F}{\delta z}} \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{N}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{N}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{N}, \text{ bezw.}$$

$$\cos\lambda = \frac{p}{n}, \quad \cos\mu = \frac{q}{n}, \quad \cos\nu = -\frac{1}{n}, \text{ wobei}$$

$$N^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z}\right)^2 \text{ und}$$
$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heisst Normalschnitt. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α, β, γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Axen bildet, dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fusspunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho' = \varrho \cos(\varrho\,\varrho') \text{ oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen grössten und einen kleinsten Wert erreicht, heissen Hauptnormalschnitte, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1+\varrho_2 &= \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}\cdot n \\ \varrho_1\,\varrho_2 &= \frac{n^4}{rt-s^2} \text{ oder als Wurzeln der Gleichung} \end{aligned}\right.$$

$$(rt-s^2)\varrho^2 - \left[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\right]n\varrho + n^4 = 0.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 gehörigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

Der Ausdruck $\dfrac{1}{\varrho_1\,\varrho_2}$

heisst das Mass der Krümmung für den betreffenden Punkt.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

d. h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe der Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heisst der Ort des Punktes einer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen zur Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher einer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer Oberfläche gehen zwei Krümmungslinien, die auf einander senkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte berühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$\left[1 + q^2)s - pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[(1+q^2)r - (1+p^2)t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left[pqr - (1+p^2)s\right] = 0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heisst geodätische Linie, wenn ihre Schmiegungsebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{d \cos\alpha} = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{d \cos\beta} = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{d \cos\gamma}$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. Hüllfläche. Die Gleichung

$$F(x, y, z, p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die

Gleichung der Hüllfläche ergiebt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p) = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\delta F(x, y, z, p)}{\delta p} = 0 \end{cases}$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.

Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx\, dy$$

$$\text{daher} \quad F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy,$$

y_0 und y_1 sind die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XYebene, x_0 und x_1 sind die Abscissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergiebt sich (—Xaxe ist Drehaxe—):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)} \,.\, r\, d\varphi\, d\psi$$

(s. § 86,3)

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (—0x Drehaxe—); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der Xaxe.

$$V = \pi \int y^2\, dx$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei

Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1{}^2)\, dx$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abscissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\, dx \qquad \text{(u abhängig von x)}$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § 86_3) ergiebt sich

$$V = \frac{1}{3} \iint r^3 \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

§ 105. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,15 052	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,10 034
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	0,23 856	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$	0,15 903
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,34 948	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7100$	0,23 300
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,38 908	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,25 937
$\sqrt{10} = 3{,}16225$	0,50 000	$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544$	0,33 333