Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 71. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abscissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der Xaxe; aus $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Yaxe.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 71. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Axen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen), φ der Winkel der Geraden mit der + Xaxe, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der + Xaxe bildet.

1. Gleichung der Geraden:*)

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0$,

zweite „ $y = mx + b$

dritte „ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

vierte „ $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ (Normalform.)

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung
für die allgemeine Form $L=0$,
" " Normalform $l=0$.

Axenabschnitte: $a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m}$

$$b = -\frac{C}{B}$$

Winkel mit der Xaxe bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B} = m = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

2. Besondere Fälle:

$x=a$ Gleichg. einer Geraden ∥ zur Yaxe
$y=b$ " " " ∥ " X "
$\left\{\begin{array}{l} Ax+By=0 \\ y=mx \end{array}\right.$ " " " durch den Ursprung
$y=0$ " der Xaxe
$x=0$ " " Y "
$0.x+0.y+C=0$ " " ∞ fernen Geraden.

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1)

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0, \text{ oder}$$
$$y-y_1 = m(x-x_1), \text{ oder}$$
$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\sin\alpha=0$$

(durch ein veränderliches m, bezw. α erhält man ein Strahlenbüschel.)

4. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ oder } \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

oder $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y = x_1y_2-x_2y_1$, oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass 3 Punkte in ger. Linie liegen.)

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1)

$$x_1y - y_1x = 0$$

5. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Ax+By+C_1=0 \end{cases} \text{oder} \begin{cases} y=mx+b \\ y=mx+b_1, \end{cases} \text{oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0 \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax+By+C=0$ und $A_1x+B_1y+C_1=0$ sind parallel, wenn $AB_1-A_1B=0$

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{oder} \quad y=mx+b$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \quad „ \quad y-y_1=m(x-x_1)$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Bx-Ay+C_1=0 \end{cases} \begin{matrix} \text{oder} \\ „ \end{matrix} \begin{cases} y=mx+b \\ y=-\frac{1}{m}x+b_1. \end{cases}$$

Die Geraden

$$\begin{matrix} Ax+By+C=0 \\ \text{u. } A_1x+B_1y+C_1=0 \end{matrix} \Big\} \text{oder} \begin{matrix} y=mx+b \text{ u.} \\ y=m_1x+b_1 \end{matrix}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1+BB_1=0 \text{ oder } mm_1+1=0$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax+By+C=0$ ist:

$$B(x-x_1)-A(y-y_1)=0$$

8. Drei Gerade $Ax+By+C=0$, $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

$$A(B_1C_2 - B_2C_1) + B(C_1A_2 - C_2A_1) + C(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

oder wenn die Zahlfaktoren λ, λ_1, λ_2 sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax + By + C) + \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x \\ B_2y + C_2) = 0.$$

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes einer Strecke, Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

für den Halbierungspunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

Teilung im Verhältnis m : n

$$x = \frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}, \quad y = \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}$$

Das Zeichen + gilt für den inneren, — für den äusseren Teilpunkt.

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2)

$$2(x_1x_2 + \xi_1\xi_2) = (x_1 + x_2)(\xi_1 + \xi_2)$$
$$2(y_1y_2 + \eta_1\eta_2) = (y_1 + y_2)(\eta_1 + \eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y = m_1x \qquad y = n_1x$$
$$y = m_2x \qquad y = n_2x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1m_2 + n_1n_2) = (m_1 + m_2)(n_1 + n_2).$$

4. Entfernung e zweier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1), welche mit der Xaxe den $\sphericalangle\, \varphi$ bildet:

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\varphi$$