



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Balkendecken

Barkhausen, Georg

Stuttgart, 1895

2) Verschiedene Oeffnungsweiten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77494](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77494)

Bei 1000 kg Beanspruchung müssen also die beiden beiderseits überkragenden Trägerstücke aus Normalprofil Nr. 36 gebildet sein.

Nach Gleichung 47 ist $M_2 = \frac{50 \cdot 0,2712 \cdot 500^2}{2} (1 - 0,2382) = 1291250 \text{ cmkg}$; für das überkragende Endstück links genügt also Profil Nr. 38 knapp.

Nach Gleichung 48 ist $M_3 = \frac{50 \cdot 500^2 (1 - 2 \cdot 0,2236)^2}{8} = 477481 \text{ cmkg}$; für den mittleren eingehängten Träger ist daher Profil Nr. 28 zu verwenden.

Nach Gleichung 49 ist $M_4 = \frac{50 \cdot 500^2 \cdot (1 - 0,1736)^2}{8} = 1068125 \text{ cmkg}$; das linke Endstück muß sonach aus Profil Nr. 36 bestehen.

Nach Gleichung 50 ist $M_5 = \frac{50 \cdot 500^2 (1 - 0,2382 - 0,2712)^2}{8} = 376075 \text{ cmkg}$; für den linken eingehängten Träger ist also Profil Nr. 26 zu verwenden.

Die Belastungen der Wände an den Enden der Unterzüge und die der stützenden Säulen ergeben sich aus den Gleichungen 55 bis 60 ohne Weiteres; z. B. ist nach Gleichung 58

$$D_4 = \frac{50 \cdot 500}{2} \left[2 + \frac{50 - 22}{4(50 + 22)} \right] = 26216 \text{ kg,}$$

oder nach Gleichung 57

$$D_3 = \frac{50 \cdot 500}{2} \left[(2 - 0,2712) (1 + 0,2382) - \frac{22}{4(22 + 50)} \right] = 25802 \text{ kg.}$$

Wären die Balken nicht überkragend angeordnet, sondern über den Unterzügen gestoßen, so hätte sich für dieselben das größte Biegemoment zu $\frac{9 \cdot 500^2}{8} = 281250 \text{ cm}$ ergeben, und statt der Querschnitte Nr. 21 und 12 hätte Nr. 22 durchweg verwendet werden müssen.

Wären zugleich die Unterzüge über den Säulen gestoßen, so hätte die Last $(500 + 400) \frac{5}{100} = 45 \text{ kg}$ für 1 cm, also das größte Biegemoment in allen Oeffnungen $\frac{45 \cdot 500^2}{8} = 1406250 \text{ cmkg}$ betragen; statt der Profile 38, 36 und 28 hätte also durchweg Nr. 40 verwendet werden müssen.

Durch Einfügen der Gelenke ist der Trägerrost also beträchtlich erleichtert, und diese Erleichterung ist durchschlagender, als die Verstärkung der Stützen, welche in Folge der Anordnung kontinuierlicher Gelenkträger erforderlich wird. Die größte Stützenlast für über den Auflagern gestoßene Balken und Unterzüge würde $500 \cdot 45 = 22500 \text{ kg}$ betragen.

2) Verschiedene Oeffnungsweiten.

105.
Grundgedanke.

Da, wo verschiedene Oeffnungsweiten, also ungleiche Stützenentfernungen zulässig sind, kann man diesen Umstand benutzen, um die Stütz- und Kraglängen den Werthen g und q so anzupassen, daß das größte Moment auch der eingehängten Trägerstücke gleich den beiden größten Momenten der Kragstücke und somit alle gefährlichen Momente eines Trägers einander gleich werden. Man erreicht so, neben der Möglichkeit, einen einheitlichen Querschnitt für den ganzen Träger durchführen zu können, zugleich thunlichst geringes Gewicht der Träger.

Da die Stützentheilung bei Erfüllung dieser Bedingung aber von g und q abhängig ist, andererseits bei mehrgeschossigen Gebäuden die Stützen verschiedener Geschosse lothrecht über einander stehen sollen, so ist die günstigste Stützentheilung in diesem Falle nicht gleichzeitig in allen Geschossen zu erreichen, wenn die verschiedenen Geschosse auf verschiedene Werthe von g und q einzurichten sind. In einem solchen Falle richte man die Stützentheilung für diejenigen Werthe von g und q ein, welche in den meisten Geschossen wiederkehren; in den übrigen Geschossen ist völlige Ausgleichung der Momente dann nicht zu erreichen, und man muß sich damit begnügen, wie bei gleicher Stützentheilung, die Momente nur an den gefährlichen Stellen der Kragtheile gleich zu machen.

Es ist hier also zuerst der Fall zu behandeln, dass die Stütztheilungen für völlige Ausgleichung aller größten Momente eingerichtet werden sollen.

106.
Erster
Fall.

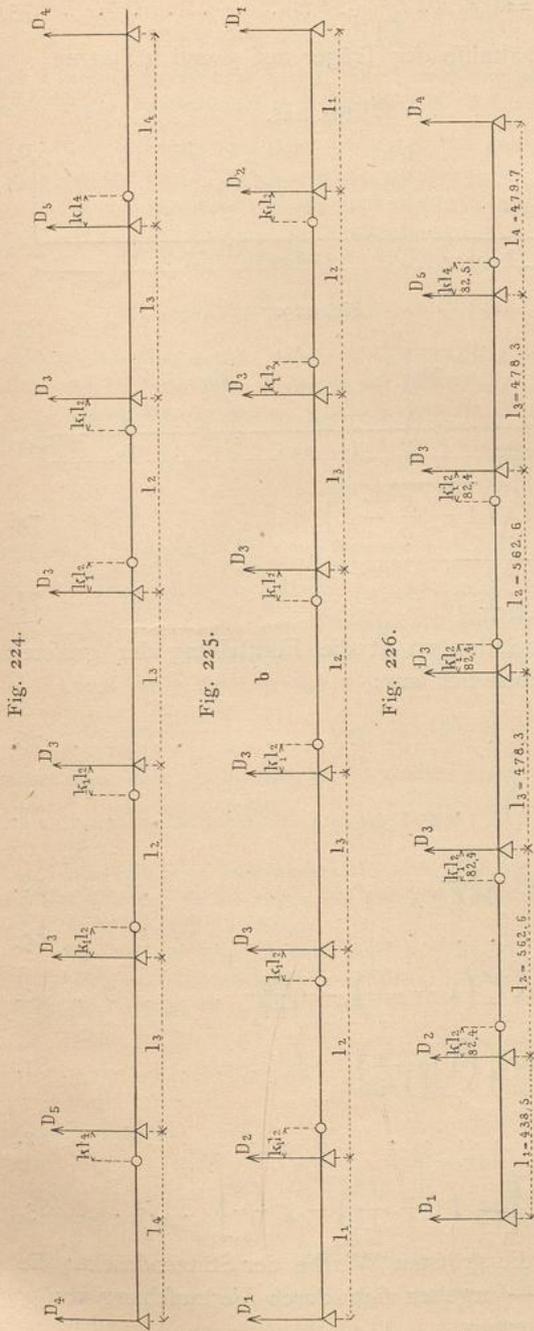


Fig. 224.

Fig. 225.

Fig. 226.

Die Anordnung dieser Bedingung genügender Träger ist allgemein in Fig. 224 u. 225 für eine ungerade, in Fig. 226 für eine gerade Anzahl von Oeffnungen dargestellt; die Anzahl der Oeffnungen für Fig. 224 u. 225 sei $2n + 1$; jene für Fig. 226 betrage $2n$.

Zunächst ergeben sich die die Gelenke fest legenden Zahlenwerthe k und k_1 aus

$$k = 3 - 2\sqrt{2} = 0,1716, \quad 65.$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = 0,14644 \quad 66.$$

Neben den Bezeichnungen, deren Bedeutung aus Fig. 224 bis 226 hervorgeht, führen wir noch die stets bekannte Gesamtlänge des Trägers L ein. Wird wieder die Eigenlast für die Längeneinheit g , die Gesamtlast q und die Nutzlast p genannt, so kann die Abmessung der einzelnen Theile nach den folgenden Ausdrücken erfolgen:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{0,3536 g}{q (\sqrt{1 + \frac{g}{q}} - 1)} \quad 67.$$

$$\frac{l_3}{l_2} = 0,7072 \sqrt{\frac{g + q}{q}} \quad 68.$$

$$\frac{l_4}{l_2} = \frac{1}{\sqrt{8k}} = 0,8525 \quad 69.$$

Damit sind alle Weiten auf l_2 bezogen, und die Berechnung von l_2 aus L geschieht nun für die verschiedenen Fälle nach den folgenden Gleichungen.

Zahl der Oeffnungen (ungerade) = $2n + 1$ (Fig. 224: Endöffnung mit Gelenk):

$$L = 2l_4 + n l_3 + (n - 1) l_2. \quad 70.$$

Zahl der Oeffnungen (ungerade) = $2n + 1$ (Fig. 225: Endöffnung ohne Gelenk):

$$L = 2l_1 + n l_2 + (n - 1) l_3. \quad 71.$$

Zahl der Oeffnungen (gerade) = $2n$ (Fig. 226):

$$L = l_1 + l_4 + (n - 1) l_2 + (n - 1) l_3. \quad 72.$$

Die bei dieser Anordnung in allen gefährlichen Querschnitten gleichen Momente sind zu berechnen nach

$$M = \frac{q l_2^2}{16} = 0,0858 q l_4^2 \dots \dots \dots 73.$$

In Fig. 227 bis 229 sind die Verhältnisse der Träger auf 3 und 4 Stützen

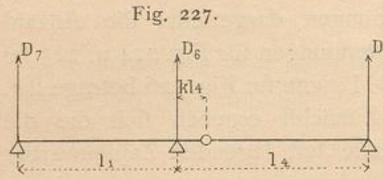


Fig. 227.

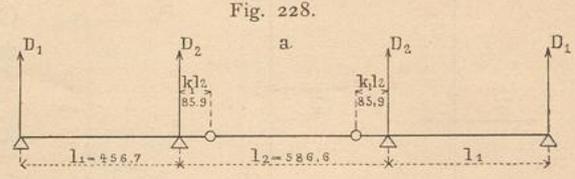


Fig. 228.

dargestellt, so weit für dieselben die aus den Gleichungen 67 bis 69 zu entnehmenden Verhältnisse nicht verwendbar sind. Danach ist

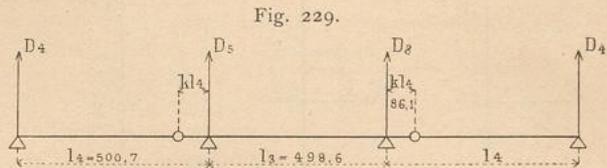


Fig. 229.

$$\frac{l_4}{l_1} = 2,411 \frac{q}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g}{q}} - 1 \right) \dots \dots \dots 74.$$

$$\frac{l_4}{l_3} = 1,207 \sqrt{\frac{q}{g + q}} \dots \dots \dots 75.$$

Für die Ermittlung der Stützenbelastungen ist die Feststellung der größten Auflagerdrücke erforderlich. Diese ergeben sich aus:

$$D_1 = \frac{q l_1}{2} - \frac{g l_2^2}{16 l_1} \dots \dots \dots 76.$$

$$D_2 = \frac{q}{2} \left(l_1 + l_2 + \frac{l_2^2}{8 l_1} \right) \dots \dots \dots 77.$$

$$D_3 = q \frac{l_2 + l_3}{2} + (q - g) \frac{l_2^2}{16 l_3} \dots \dots \dots 78.$$

$$D_4 = 0,4142 q l_4 \dots \dots \dots 79.$$

$$D_5 = q \frac{l_3 + l_4}{2} + 0,0858 q l_4 \left(1 + \frac{l_4}{l_3} \right) - \frac{g l_2^2}{16 l_3} \dots \dots \dots 80.$$

$$D_6 = q \frac{l_1 + l_4}{2} + 0,0858 q l_4 \left(1 + \frac{l_4}{l_1} \right) \dots \dots \dots 81.$$

$$D_7 = \frac{q l_1}{2} - 0,0858 g \frac{l_4^2}{l_1} \dots \dots \dots 82.$$

$$D_8 = q \frac{l_3 + l_4}{2} + 0,0858 \left[q l_4 \left(1 + \frac{l_4}{l_3} \right) - g \frac{l_4^2}{l_3} \right] \dots \dots \dots 83.$$

Die Gleichungen 76 bis 83 geben die größten Werthe der Stützendrücke; die kleinsten — möglicher Weise negativen — ergeben sich durch Vertauschung von g mit q und q mit g aus denselben Gleichungen.

Beispiel. Des Vergleiches wegen mag hier die in Art. 104 (S. 122) schon für gleiche Stützeitheilungen zu Grunde gelegte Decke nach den nunmehr vorliegenden Gesichtspunkten nochmals durchgerechnet werden. Es ist also für die Balken $L = 15$ m und für die Unterzüge $L = 30$ m; die Eigenlast beträgt 400 und die Nutzlast 500 kg für 1 qm.

Für die Balken ist $p = 4$, $q = 9 \text{ kg}$ für 1 cm und bei Anordnung nach Fig. 228 mit Gelenken in der Mittelöffnung nach Gleichung 67

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{0,3536 \cdot 4}{9 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{9}} - 1 \right)} = 0,7784;$$

nach Gleichung 71 wird für $n = 1$ und $L = 15$ hiernach $15 = 2 \cdot 0,7784 l_2 + 1 \cdot l_2$; fomit $l_2 = 5,866$ und $l_1 = 4,567 \text{ m}$, und weiter nach Gleichung 66: $k_1 l_2 = 0,14644 \cdot 5,866 = 0,859 \text{ m}$.

Nach Gleichung 73 ist das überall gleiche grösste Moment $M = \frac{9 \cdot 586,6^2}{16} = 193556 \text{ cmkg}$; es genügt also bei 1000 kg zulässiger Beanspruchung das Profil Nr. 20.

Die Belaftung der Unterzüge folgt nach Gleichung 77

$$\text{mit dem grössten Werthe } D_2 = \frac{9}{2} \left(456,7 + 586,6 + \frac{586,6^2}{8 \cdot 456,7} \right) = 5118 \text{ kg,}$$

$$\text{mit dem kleinsten Werthe } D_2 = \frac{4}{2} \left(456,7 + 586,6 + \frac{586,6^2}{8 \cdot 456,7} \right) = 2274 \text{ kg.}$$

Werden diese Lasten, welche in $1,6 \text{ m}$ Theilung wiederkehren, gleichförmig vertheilt gedacht, so werden für die Unterzüge $q = 51,2 \text{ kg}$ und $g = 22,8 \text{ kg}$.

Werden für die Balken nach Fig. 229 die Gelenke in die Endöffnungen gelegt, so ist nach Gleichung 75

$$\frac{l_4}{l_3} = 1,207 \sqrt{\frac{9}{4 + 9}} = 1,0043,$$

fomit nach Gleichung 70 für $n = 1$ nunmehr $15 = 2 l_4 + \frac{1}{1,0043} l_4$, also $l_4 = 5,007 \text{ m}$ und $l_3 = 4,986 \text{ m}$.

Nach Gleichung 63 ist $k l_4 = 0,1716 \cdot 5,007 = 0,861 \text{ m}$. Nach Gleichung 73 wird

$$M = 0,0858 \cdot 9 \cdot 500,7^2 = 194041 \text{ cmkg,}$$

also eben so groß, wie nach der Anordnung mit Gelenken in der Mittelöffnung.

Die Belaftung der Unterzüge wird nach Gleichung 83 am grössten, demnach

$$D_8 = 9 \frac{498,6 + 500,7}{2} + 0,0858 [9 \cdot 500,7 (1 + 1,0043) - 4 \cdot 1,0043 \cdot 500,7] = 5100 \text{ kg;}$$

am kleinsten, wenn in Gleichung 83 die Gröfsen g und q vertauscht werden, fomit

$$D_8 = 4 \frac{498,6 + 500,7}{2} + 0,0858 [4 \cdot 500,7 (1 + 1,0043) - 9 \cdot 1,0043 \cdot 500,7] = 1955 \text{ kg.}$$

Hier sind beide Anordnungen also etwa gleichwerthig; wegen der besseren Verbindung der Säulen mit den Wänden, so wie wegen der geringeren Schwankung in der Belaftung der Unterzüge wird die erstere nach Fig. 228 beibehalten.

Für den Unterzug ist fomit rund $q = 51,2 \text{ kg}$ und $g = 22,8 \text{ kg}$ für 1 cm . Um bei $L = 30 \text{ m}$ annähernd 5 m Säulenentfernung zu erhalten, werden 6 Oeffnungen angeordnet, so dafs Fig. 226 mafsgebend ist. Alsdann ist nach Gleichung 67

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{0,3536 \cdot 22,8}{51,2 \left(\sqrt{1 + \frac{22,8}{51,2}} - 1 \right)} = 0,7793;$$

nach Gleichung 68

$$\frac{l_3}{l_2} = 0,7072 \sqrt{\frac{22,8 + 51,2}{51,2}} = 0,8502;$$

nach Gleichung 69

$$\frac{l_4}{l_2} = 0,8525.$$

Wird weiter in Gleichung 72 für n der Werth 3 eingesetzt, so folgt

$$30 = l_2 (0,7793 + 0,8525 + 2 + 2 \cdot 0,8502) \text{ oder } l_2 = 5,626 \text{ m;}$$

Danach ist

$$l_1 = 0,7793 \cdot 5,626 = 4,385 \text{ m,}$$

$$l_3 = 0,8502 \cdot 5,626 = 4,783 \text{ m,}$$

$$l_4 = 0,8525 \cdot 5,626 = 4,797 \text{ m.}$$

Das an allen gefährlichen Stellen gleiche größte Moment ist nach Gleichung 73

$$M = \frac{51,2 \cdot 562,6^2}{16} = 1012860 \text{ cmkg.}$$

Bei 1000 kg Beanspruchung ist fonach durchweg das I-Profil Nr. 36 zu verwenden, und es ist fomit trotz der etwas größeren Last die Trägeranordnung hier vortheilhafter, als bei gleichen Stützentheilungen.

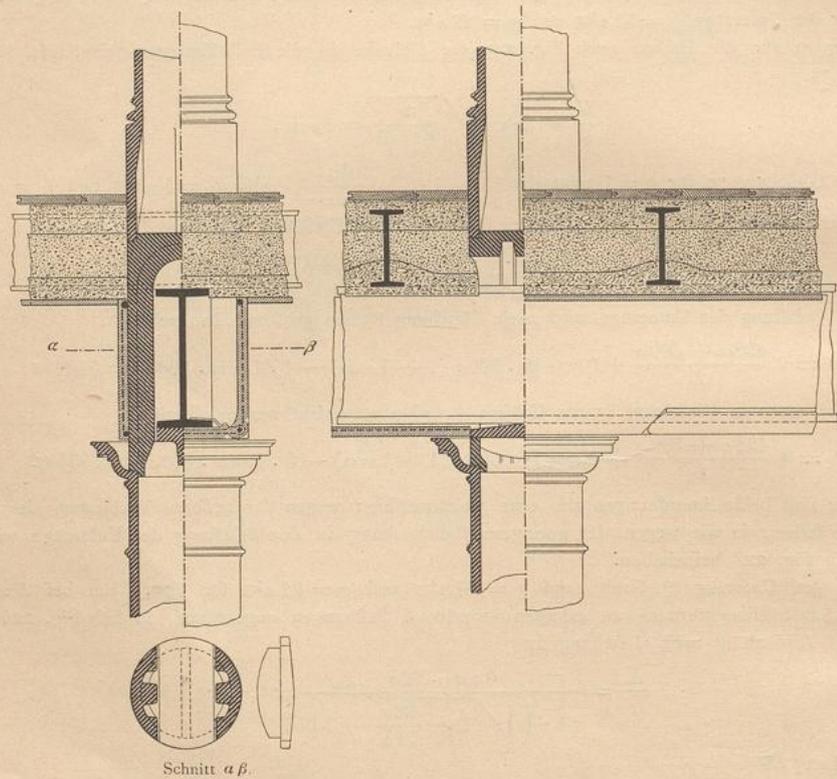
Die Länge $k_1 l_2$ wird nach Gleichung 66: $0,14644 \cdot 562,6 = 82,4 \text{ cm}$ und $k l_4$ nach Gleichung 65: $0,172 \cdot 479,7 = 82,5 \text{ cm}$.

Die Stützendrücke, welche aus den Gleichungen 76 bis 83 folgen, werden hier um ein Geringes größer, als bei gleicher Theilung der Stützen. So wird z. B. nach Gleichung 78

$$D_3 = 51,2 \frac{562,6 + 478,3}{2} + (51,2 - 22,8) \frac{562,6^2}{16 \cdot 478,3} = 27820 \text{ kg.}$$

Der Druck D_3 für gleiche Stützentheilung betrug nur 25802 kg; doch hat dieser Unterschied keinen erheblichen Einfluss auf die Kosten der Säulen; viel wichtiger ist die durch die überall gleiche Trägerhöhe erzielte größere Gleichmäßigkeit in der Ausbildung der Stützen, wie der ganzen Decke.

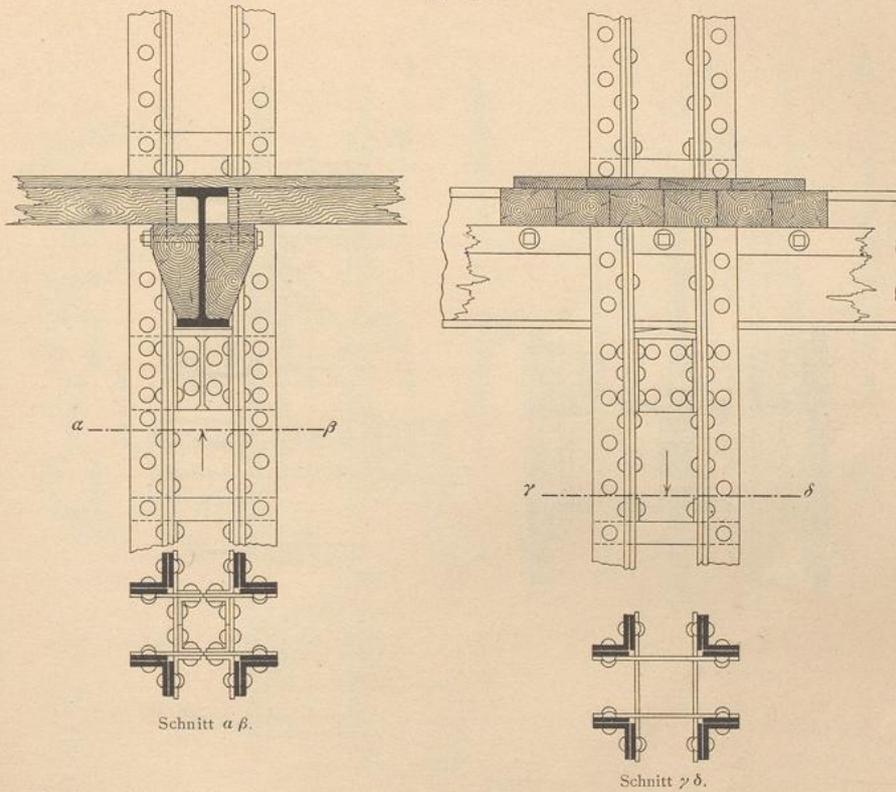
Fig. 230.



Es mag noch besonders hervorgehoben werden, daß in den Rechnungsbeispielen das Eigengewicht der Träger vernachlässigt wurde; bei Berechnungen für die Ausführung genügt es, für die Balken ein Gewicht von $0,5 \text{ kg}$ für 1 cm , für die Unterzüge ein folches von $0,9 \text{ kg}$ für 1 cm von vornherein einzuführen. In der Regel werden die Träger diese Gewichte nicht ganz erreichen.

Bei einfacher Anordnung der Unterzüge könnten die Stützen nach den Beispielen in Fig. 230 bis 234 ausgebildet werden; die Anordnung in Fig. 235 ist für so schwere Traganordnungen, wegen der Schwächung der Säule, weniger zu empfehlen. Bei gußeisernen Stützen sind nur die Anordnungen in Fig. 236 u. 230 ganz

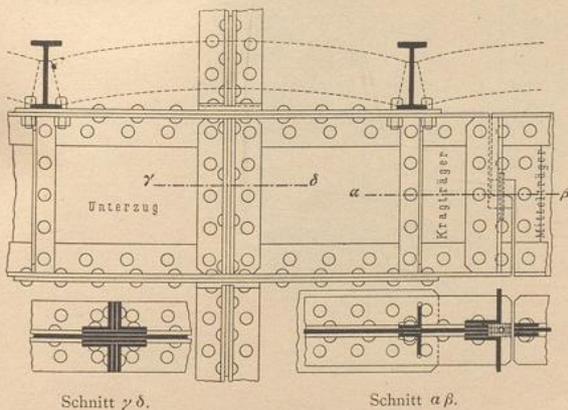
Fig. 231.



vollkommen, so wie für nicht zu große Belastung auch die Anordnung nach Fig. 17 (S. 14); Fig. 236 bedingt aber eine Balkenlagerung nach Fig. 237 oder 238. Man erkennt hieraus, dass sich kontinuierliche Gelenkunterzüge bei schmiedeeisernen Stützen wesentlich bequemer anordnen lassen, als bei den geschlossenen gußeisernen, wenn nicht die Decke so leicht ist, dass man die Anordnung nach Fig. 17 (S. 14), Fig. 230 oder 235 unbedenklich wählen kann.

Bei den ungleichen Stützentheilungen ist das Nachrechnen der kleinsten Stützendrücke nach den Gleichungen 76 bis 83, unter Vertauschen von g und q , noch wichtiger, als bei gleichen Oeffnungen, da hier noch leichter als dort die Verankerung der Auflagerstellen nach unten für negative Stützendrücke erforderlich wird. Zur Aufhebung dieser stets geringen negativen Auflagerdrücke wird in der Regel schon das Gewicht der Stützen genügen. Die Endauflager, bei denen am leichtesten negative Auflagerkräfte vorkommen, können meist Verankerungen in den Wänden erhalten;

Fig. 232.



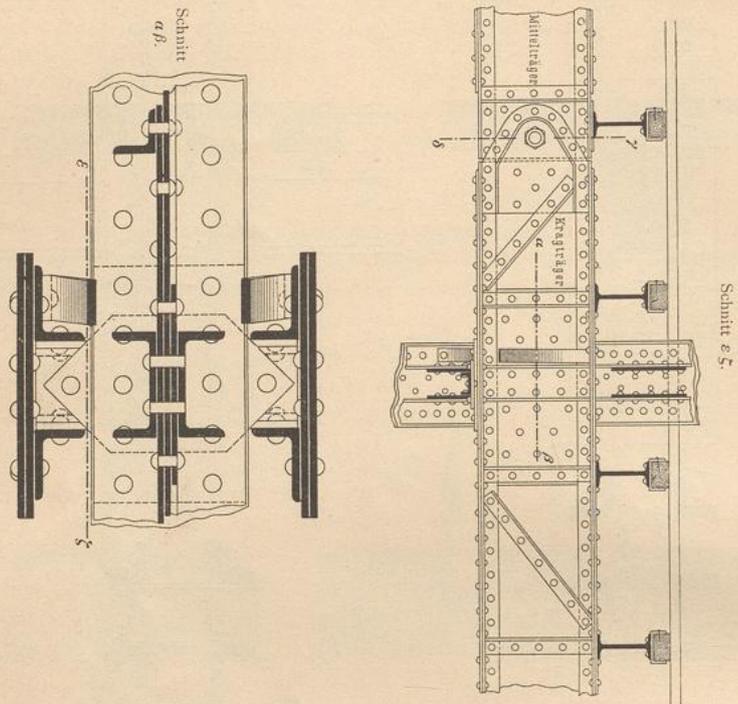


Fig. 233.

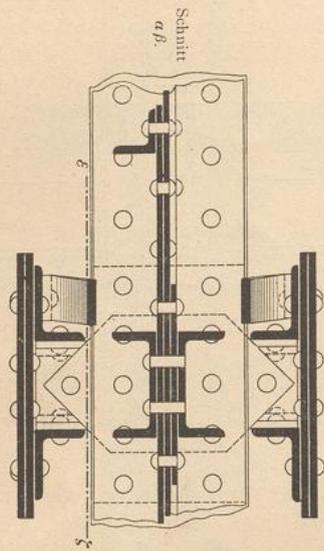
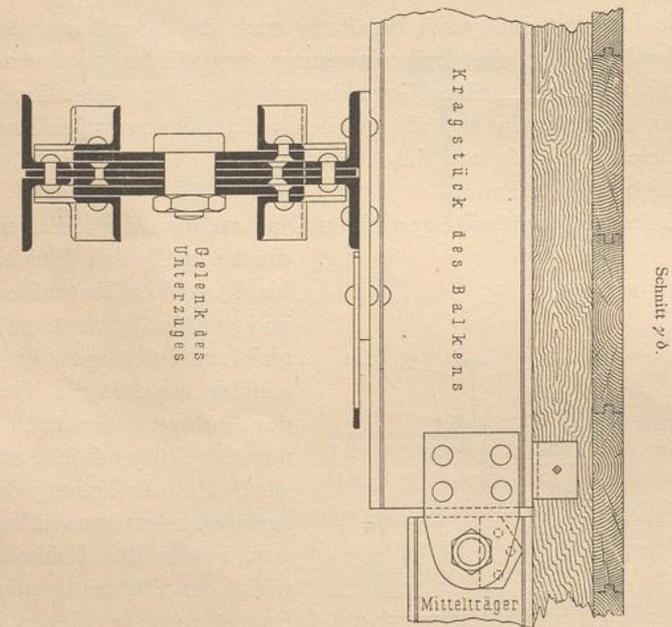


Fig. 234.

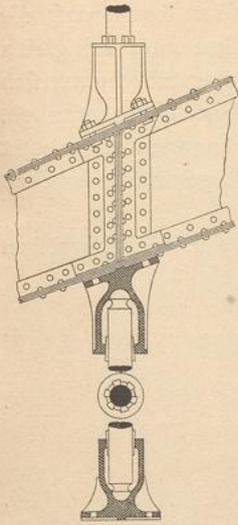


Fig. 235.

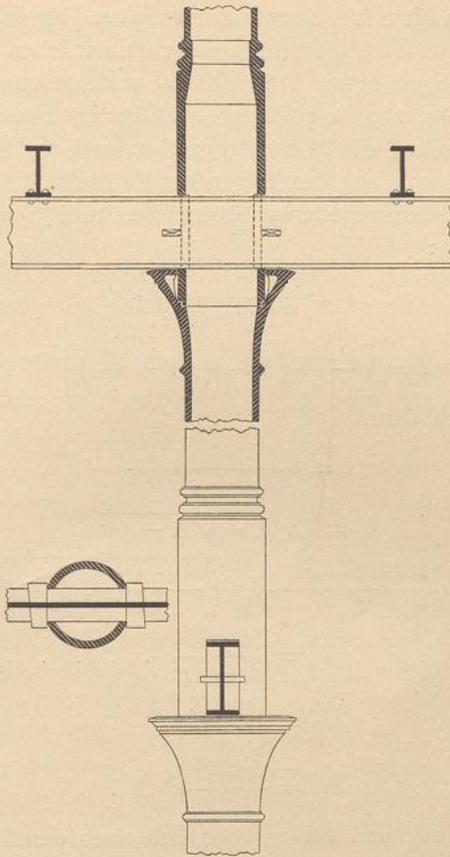


Fig. 236.

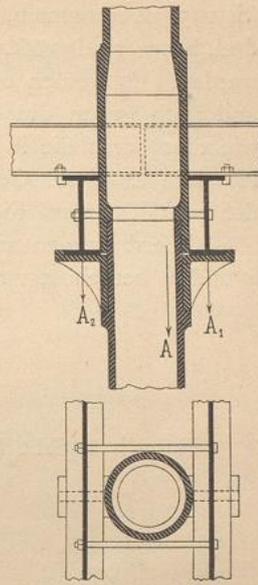


Fig. 237.

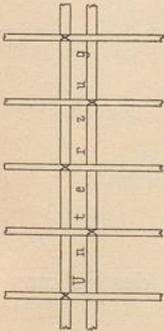
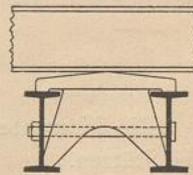


Fig. 238.



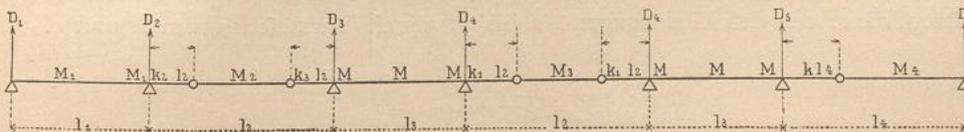
doch ist dann bei Bemessung der Wandstärken die Wirkung dieser meist außerhalb des Schwerpunktes nach oben wirkenden Kräfte genau zu berücksichtigen.

Der zweite Fall ist der, dass die Stützweiten zwar verschieden, aber unabhängig vom Verhältnisse $g : q$ fest vorgeschrieben sind, so dass die Ausgleichung aller größten Momente nicht mehr möglich ist.

107.
Zweiter
Fall.

Abgesehen von ganz unregelmäßigen Anordnungen, in denen bloß Sonderrechnungen von Fall zu Fall zum Ziele führen können, ist hier nur der oben angedeutete Fall allgemein zu behandeln, dass die Stützenstellung in Fig. 224 bis 228 für ein Gefchofs auf vollständige Ausgleichung der Momente eingerichtet wurde, und nun in einem anderen Gefchoffe durchgeführt werden muss, wo sie dem dort auftretenden Verhältniffe $g : q$ nicht mehr entspricht.

Fig. 239.



In Fig. 239 sind daher die Bezeichnungen der Stützweiten aus Fig. 224 bis 226 (S. 125) übernommen, und es kommt nun darauf an, die Gelenke so zu legen, daß die drei, bzw. zwei größten Momente eines kontinuierlichen Trägerstückes unter sich gleich werden. Es werden dann im Allgemeinen die kontinuierlichen Trägerstücke unter sich und auch gegen die eingehängten Trägerstücke verschiedenen Querschnitt erhalten, wie dies durch die in Fig. 239 beigeführten Momentenbezeichnungen angedeutet ist. Die Lage der Gelenke, die Momentengrößen und die Auflagerdrücke ergeben sich mit Bezug auf Fig. 239 aus den folgenden Formeln.

Zuerst werden aus den gegebenen Stützweiten und g und q zwei Hilfsgrößen a und b berechnet nach:

$$a = \frac{q}{4(g+q)} \frac{l_3^2}{l_4^2} \dots \dots \dots 84.$$

$$b = \left[\frac{q}{g} \frac{l_1}{l_2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{g}{q}} \right) \right]^2 \dots \dots \dots 85.$$

Danach ergibt sich dann

$$k = \frac{q}{4(g+q)} \frac{l_3^2}{l_4^2} \dots \dots \dots 86.$$

$$k_1 = 0,5 (1 - \sqrt{1 - 4a}) \dots \dots \dots 87.$$

$$k_2 = \frac{b+1-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{b+1-a}{2} \right)^2 - b} \dots \dots \dots 88.$$

$$k_3 = \frac{a}{1-k_2} \dots \dots \dots 89.$$

$$M = \frac{q a l_2^2}{2} \dots \dots \dots 90.$$

$$M_1 = \frac{q b l_2^2}{2} \dots \dots \dots 91.$$

Die Momente M_3 , M_4 und M_5 ergeben sich nach den Regeln des Balkens auf zwei Stützen.

Die größten Werthe der Stützdrücke sind:

$$D_1 = \frac{q l_1}{2} - \frac{g b l_2^2}{2 l_1} \dots \dots \dots 92.$$

$$D_2 = \frac{q}{2} \left[l_1 + l_2 \left(k_2 + 1 + k_2 \frac{l_2}{l_1} \right) (1 - k_3) \right] \dots \dots \dots 93.$$

$$D_3 = \frac{q}{2} \left[l_2 (1 - k_2) + l_3 \right] \left(1 + k_3 \frac{l_2}{l_3} \right) - \frac{g a l_2^2}{2 l_3} \dots \dots \dots 94.$$

$$D_4 = \frac{q}{2} \left(l_2 + l_3 + a \frac{l_2^2}{l_3} \right) - \frac{g a l_2^2}{2 l_3} \dots \dots \dots 95.$$

$$D_5 = \frac{q}{2} \left[l_3 + l_4 + k l_4 \left(1 + \frac{l_4}{l_3} \right) \right] \dots \dots \dots 96.$$

$$D_6 = \frac{q}{2} l_4 (1 - k) \dots \dots \dots 97.$$

Auch hier ergeben sich die geringsten, möglicher Weise negativen Werthe der Stützdrücke aus den Gleichungen 92 bis 97 durch Vertauschen von g und q .