



Balkendecken

Barkhausen, Georg

Stuttgart, 1895

a) Gestaltung der Tonnengewölbe

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77494](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77494)

- BOSC, E. *Étude pratique sur la construction des voûtes. Gaz. des arch. et du bât.* 1877, S. 46, 71, 99, 111, 122.
- GOTTGETREU, R. Beitrag zur geschichtlichen Entwicklung der Gewölbe. *Zeitschr. f. Bauw.* 1879, S. 91. Ueber Bruchsteingewölbe in magerem Cementmörtel. *Baugwks.-Ztg.* 1883, S. 246.
- MENZEL, C. A. Der Gewölbebau dargestellt in Bezug auf Entstehung und Anwendung, Bau und Konstruktion, Tragfähigkeit etc. mit Berücksichtigung der Wölbungen der Thür- und Fenstersturze, der Rauchmäntel und der gewölbten Treppen. Herausg., verm. u. verb. von C. SCHWATLO. Halle 1866. — 2. Aufl. von A. C. MENZEL & G. FRANKE. 1875.
- EAGLES, T. H. *On vaulting. Builder*, Bd. 32, S. 496. *Building news*, Bd. 26, S. 625, 633, 635. *Vaulting. Builder*, Bd. 32, S. 1035.
- Construction der Gewölbe. HAARMANN'S *Zeitschr. f. Bauhdw.* 1876, S. 7, 21.

9. Kapitel.

Tonnen- oder Kufengewölbe.

a) Gestaltung der Tonnengewölbe.

124.
Gerades
Tonnen-
gewölbe;
Halbkreis-
gewölbe.

Das einfache Tonnen- oder Kufengewölbe besitzt als Laibungsfläche die halbe Oberfläche eines geraden Kreiscylinders. Die Gewölbaxe steht also rechtwinkelig zur Ebene des erzeugenden Halbkreises, weshalb ein solches Gewölbe auch ein »gerades Tonnengewölbe« genannt wird. Jeder Schnitt, parallel zu dieser Ebene geführt, liefert wiederum denselben Halbkreis und diesem entsprechende Stosfugenkanten. Jede Ebene, welche durch die Gewölbaxe geführt wird, schneidet die Laibungsfläche in geraden, der Gewölbaxe parallelen Linien oder geraden Lagerfugenkanten. Die Pfeilhöhe dieses Gewölbes ist gleich der halben Spannweite desselben, mithin wird das Pfeilverhältniß $\frac{1}{2}$.

In Fig. 250 ist ein gerades, einfaches Tonnengewölbe dargestellt.

Die Rückenlinie desselben ist ein zur inneren Wöblinie concentrisch geführter Halbkreis, so daß für das Gewölbe überall die gleiche Gewölbstärke vorhanden ist. Die Widerlagskörper *A* stützen das Gewölbe. Die eine Widerlagsmauer ist mit Oeffnungen versehen, welche unterhalb der Kämpferschicht *B* mit starken Steinquadern *F*, »geraden Sturzen«, überdeckt sind. Die Schildmauer *D* ist durchbrochen und in ihrer Oeffnung oben mit einem halbkreisförmigen »Mauerbogen« abgeschlossen.

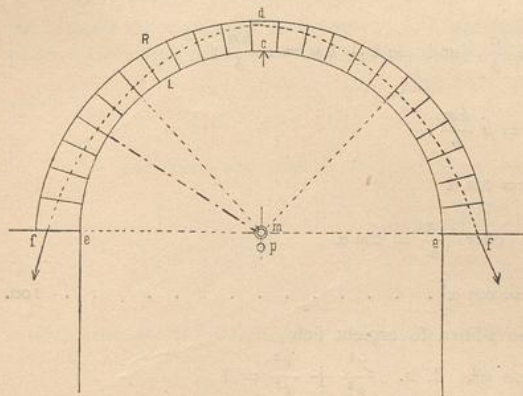
Die Stirn *BEB* des Gewölbes ist durch die radial gerichteten Gewölbefugen so getheilt, daß eine ungerade Anzahl gleich großer Theilungen der Wölbefugen *B, C, E* entstanden, also eine Schlusfuge vermieden und die Anordnung einer Schlussteinreihe *E* ermöglicht ist, welche zu beiden Seiten von symmetrisch liegenden Gewölbefchenkeln begleitet wird.

Fig. 250.



Die Lagerfugenkanten treten als gerade Linien auf, welche vom Vorhaupt bis zum Hinterhaupt durchlaufen, während die Stosfugenkanten, welche Theile des erzeugenden Halbkreises sind, bei den einzelnen Wölbflächen in Verband gefetzt, gegen die Lagerfugenkanten geführt sind. Die einzelnen Wölbsteine haben eine keilförmige Gestalt. Die Gewölbefohle ist eine wagrechte Ebene; die Lagerfugenflächen stehen senkrecht zur Laibungsfläche und rechtwinkelig zur Stirn des Gewölbes, während die Stosfugenflächen rechtwinkelig zu den Lagerfugenflächen und in Ebenen auftreten, welche parallel mit der Gewölbefirn sind.

Fig. 251.



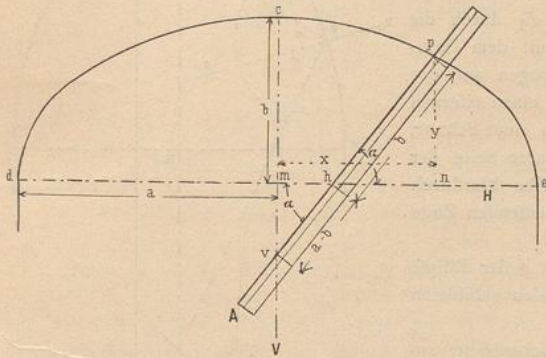
Aus statischen Gründen ist häufig die Rückenlinie *R* (Fig. 251) auch bei den einfachen geraden halbkreisförmigen Tonnengewölben kein zur inneren Wölblinie concentrischer Kreis, sondern ein Kreisbogen *fdf* mit dem Mittelpunkte *p*, welcher tiefer liegt, als der Mittelpunkt *m* der inneren Wölblinie *L*. Hierdurch tritt eine vom Scheitel *cd* aus bis zum Gewölbfuß *ef* stetig wachsende Gewölbstärke auf; der Fugen-

schnitt für das Gewölbe selbst erleidet aber hierdurch im Allgemeinen keine Aenderung.

Ist die Laibungsfläche eines geraden Tonnengewölbes die halbe Oberfläche eines elliptischen Cylinders, so entsteht das elliptische Tonnengewölbe. Ist in Fig. 252 die Pfeilhöhe *mc* die halbe kleine Axe der Ellipse, während die große

125.
Elliptisches
Tonnengewölbe.

Fig. 252.



Axe *de* die Spannweite giebt, so heisst ein solches elliptisches Gewölbe ein gedrücktes Tonnengewölbe, und andererseits wird ein elliptisches Gewölbe ein überhöhtes Tonnengewölbe (Fig. 253) genannt, wenn die halbe große Axe *mc* der Ellipse zur Pfeilhöhe und die kleine Axe *de* derselben zur Spannweite genommen wird. Auch bei diesen elliptischen Gewölben sind die Lagerfugenflächen winkelrecht zur Laibungsfläche und senkrecht zur Stirnebene des Gewölbes anzuordnen.

In Fig. 252 u. 253 sind die Constructionen für Ellipsen gegeben, welche zweckmäfsig für das Zeichnen derselben auf dem Reissboden (Gypsestrich, Bretterboden) in der Praxis Anwendung finden.

In Fig. 252 sei die Länge der halben großen Axe der Ellipse $md = a$, diejenige der halben kleinen Axe $mc = b$. *A* sei eine Holzleiste mit gerader Kante *vp*. Auf derselben ist $vp = a$ und $ph = b$ genau abgetragen und bezeichnet, so dafs auch $vh = a - b$ ist.

Bewegt man diese Leiste in der Weise, dafs der Punkt *v* sich dabei auf der lothrechten Linie *V* der kleinen Axe *b* und der Punkt *h* sich auf der wagrechten Linie *H* der großen Axe fortbewegt, so wird durch den Punkt *p* stets ein Ellipsenpunkt bestimmt. Sind solche Punkte *p* in grösserer Zahl fest gelegt, so kann das Zeichnen der Ellipse leicht vorgenommen werden. Auf dem Zeichentische benutzt man statt der Holzleiste einen Papierstreifen mit gerader Seitenkante.

Dafs p mit den Coordinaten x, y ein Punkt der Ellipse ist, folgt unter Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Fig. 252 durch nachstehende Ueberlegung. Es ist $\frac{y}{b} = \sin \alpha$, also

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \alpha \dots \dots \dots 98.$$

Ferner ist

$$x = mh + hn \dots \dots \dots 99.$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke mhv und hnp ergibt sich

$$\frac{mh}{hn} = \frac{a-b}{b};$$

folglich ist auch

$$\frac{mh + hn}{hn} = \frac{a-b+b}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad mh + hn = a \frac{hn}{b};$$

d. i. unter Benutzung von Gleichung 99

$$x = a \frac{hn}{b},$$

und, da

$$\frac{hn}{b} = \cos \alpha$$

ist, auch

$$x = a \cdot \cos \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} = \cos \alpha$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \alpha \dots \dots \dots 100.$$

Werden die beiden Gleichungen 98 und 100 addirt, so ergibt sich

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \quad \text{d. h.} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

woraus

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \dots \dots \dots 101.$$

als bekannte Mittelpunktsgleichung der Ellipse folgt.

In Fig. 253 ist die Ellipsen-Construction mit Hilfe der Brennpunkte F, F_1 unter Benutzung der Eigenschaft der Ellipse, dafs die Summe der von irgend einem Ellipsenpunkte p nach den Brennpunkten gezogenen Leitstrahlen $pF + pF_1$ gleich der Länge $2a$ der grofsen Axe ist, angegeben.

Man bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch die Schnittpunkte der aus dem Punkte d oder e mit dem Halbmesser $dF = dF_1 = a$ beschriebenen Kreisbogen auf der grofsen Axe cg . Befestigt man in F und F_1 je einen eisernen Nagel (Drahtstift), knüpft man hieran die Enden einer Schnur, deren Länge $cg = 2a$ ist, legt man an die innere Seite der Schnur einen Bleistift und spannt man dieselbe hierdurch leicht an, so kann die Ellipse in einem fortlaufenden Zuge »aufgerissen« werden.

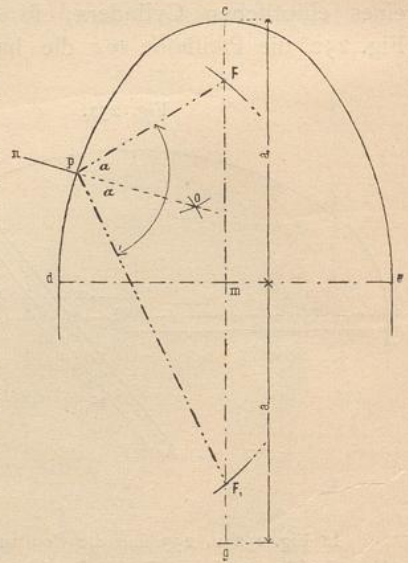
Die Normale pn für irgend einen Punkt p der Ellipse ist der Halbirungstrahl no des von den Leitstrahlen gebildeten Winkels FpF_1 .

Ein ferneres, jedoch mehr auf dem Zeichenbrette angewendetes Verfahren zum Zeichnen einer Ellipse, welches wohl die Methode der »Vergatterung« genannt wird, ist in Fig. 254 gegeben.

Man theilt die halbe kleine Axe $mc = me = b$ proportional mit der Theilung der halben grofsen Axe $dm = a$ und giebt den Ordinaten, welche den einzelnen Theilpunkten entsprechen, die ihnen zukommenden Längen der Ordinaten eines um m mit dem Halbmesser b geschlagenen Viertelkreises.

Die proportionale Theilung von b und a erfolgt sehr einfach durch Benutzung der Strahlen dc und ce . Zieht man durch den beliebigen Punkt g die Linie gi parallel zu mc , so schneidet dieselbe den Strahl ce im Punkte h . Die Parallele zu de durch h geführt, schneidet den Strahl dc in h_1 , und die durch h_1 zu mc gezogene Parallele $i_1 h_1 g_1$ theilt in ihrem Fufspunkte g_1 die Länge $dm = a$ in demselben Verhältnisse, wie der Punkt g die Länge $me = b$ getheilt hat.

Fig. 253.



hgf und cme zunächst $\frac{z}{v} = \frac{b}{a}$, demnach

$$z = v \frac{b}{a} \dots \dots \dots 105.$$

Da auch $\Delta fgm \sim \Delta kem$ ist, so erhält man $\frac{v}{x} = \frac{b}{a}$,

woraus

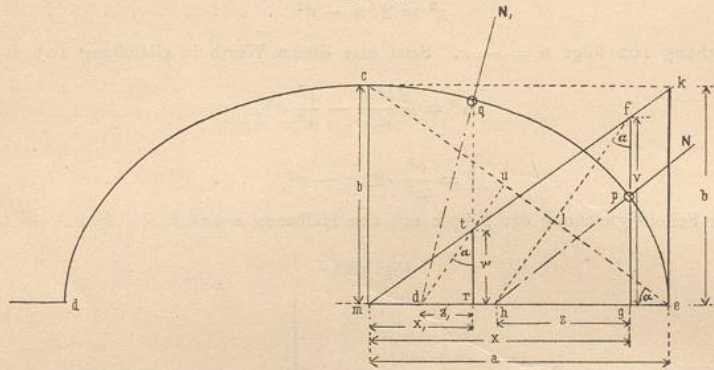
$$v = \frac{b}{a} x \dots \dots \dots 106.$$

Setzt man diesen Werth für v in Gleichung 105, so wird

$$z = \frac{b^2}{a^2} x, \dots \dots \dots 107.$$

entsprechend dem Ausdruck für die Subnormale des Ellipsenpunktes p .

Fig. 255.



Eben so ergibt sich für die Normale N_1 des Punktes q der Ellipse der Ausdruck

$$z_1 = \frac{b^2}{a^2} x_1.$$

Oft begnügt man sich bei praktischen Ausführungen beim Festlegen der Normalen in Ellipsenpunkten mit einem Näherungsverfahren. Man schneidet z. B. in Fig. 254 von p_1 nach rechts und links gleiche Stücke p_1q und p_1r von verhältnismäßig geringer Länge ab, und betrachtet das Ellipsenstück qr als eine gerade Linie, auf welcher in ihrem Halbirungspunkte p_1 die Winkelrechte p_1s als Normale der Ellipse errichtet wird.

126.
Korbbo-
gewölbe.

In manchen Fällen ist es vorthailhaft, bei den im Gewölbepbau auftretenden ellip- tischen Tonnengewölben während der Ausführung des Gewölbes selbst ein noch einfacheres Festlegen der normal zur Ellipse gerichteten Gewölbefugen veranlassen zu können, als folches nach den im vorhergehenden Artikel gezeigten Verfahren möglich ist. Zu diesem Zwecke ersetzt man die Ellipse durch einzelne Kreisbogen- stücke, welche mit Krümmungshalbmessern derart beschrieben und zusammengesetzt werden, daß eine Curve entsteht, welche der beabsichtigten Ellipse thunlichst nahe kommt. In Fig. 256 ist eine derartige Construction der Bogenlinie dce ausgeführt.

Um den Mittelpunkt m der Ellipse sind 3 concentrische Kreise beschrieben, deren Halbmesser mg gleich der halben kleinen Axe, me gleich der halben großen Axe und mh gleich der halben großen Axe plus der halben kleinen Axe zu nehmen sind.

Zur Bestimmung eines Ellipsenpunktes und der dazu gehörigen Normalen ist der beliebige Strahl $mk l$ gezogen, welcher den Kreis g in i , den Kreis e in k und den Kreis h in l schneidet. Zieht man ip parallel zu mh und kp parallel zu mc , so schneiden sich diese beiden Linien im Punkte p , welcher be- kanntlich ein Punkt der Ellipse mit den Halbaxen me und mc ist. Verbindet man l mit p , so ist lp die Normale für die Ellipse im Punkte p .

Auf der linken Seite von Fig. 256 sind für vier Haupttheile und in der Nähe der großen Axe für einen Zwischentheil der halben Ellipse die Normalen co , qr , $st \dots$ gezeichnet. Die Schnittpunkte $5, 4, 3 \dots$ der Normalen co mit qr , fodann qr mit $st \dots$ liefern die Krümmungsmittelpunkte der

zugehörigen Kreisbogen, und zwar 5 für den Kreisbogen cg , 4 für den Kreisbogen qs Der für die Ellipse mit den Halbaxen a und b maßgebende Krümmungshalbmesser ρ ist in den Endpunkten der großen Axe als

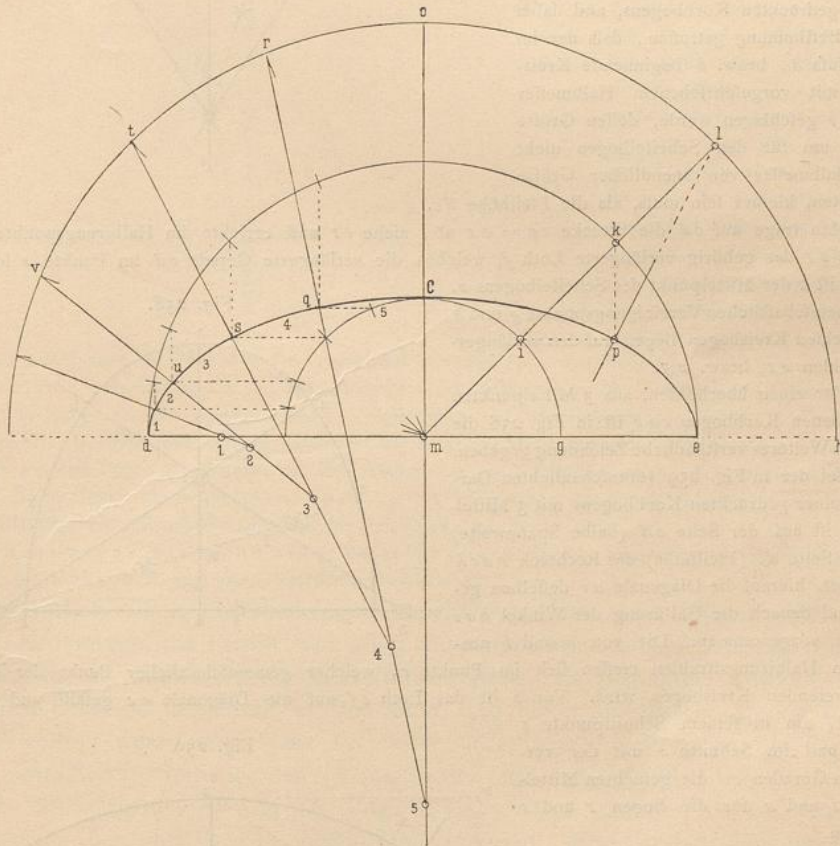
$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

und in den Endpunkten der kleinen Axe als

$$\rho = \frac{a^2}{b}$$

bekanntlich bestimmt, so daß nach Berechnung dieser Werthe die größten und kleinsten Krümmungshalbmesser von vornherein fest gesetzt werden können.

Fig. 256.



Die aus den verschiedenen Kreisbogenstücken zusammengefügte Bogenlinie dce , wobei in den Vereinigungspunkten c, q, s . . . für je 2 Kreisbogen eine gemeinschaftliche Tangente vorhanden ist, wird Korbbogenlinie oder kurz Korbbogen genannt. Sie wird beschrieben aus einer bestimmten, bei Korbbogen mit wagrechter Axe und wagrechter Scheiteltangente ungeraden Anzahl von Mittelpunkten, beispielsweise deren 9 in Fig. 256.

Wenngleich die Anzahl dieser Mittelpunkte nach dem oben erklärten Verfahren beliebig groß genommen werden könnte, so ist doch für die praktische Ausführung solcher Korbbogen meistens nur eine geringe Zahl von Mittelpunkten erforderlich. In vielen Fällen, namentlich wenn bei gedrückten Bogen das Pfeilverhältniß nicht unter $\frac{1}{3}$ sinkt, werden nur 3 Krümmungsmittelpunkte benutzt.

Von den zahlreichen Angaben für die Construction von Korbbogen sollen hier nur einige, welche in der Praxis noch hier und dort Anwendung finden, berücksichtigt werden.

1) Korbbogen aus 3 Mittelpunkten. Es sei in Fig. 257 ab die gegebene Spannweite, cd die gewählte oder gegebene Pfeilhöhe eines zu zeichnenden gedrückten Korbbogens, und dabei sei die Bestimmung getroffen, daß der im Gewölbfuß a , bezw. b beginnende Kreisbogen mit vorgeschriebenem Halbmesser $a1 = b3$ geschlagen werde, dessen Größe jedoch, um für den Scheitelbogen nicht einen Halbmesser von unendlicher Größe zu erhalten, kleiner sein muß, als die Pfeilhöhe dc .

Man trage auf cd die Strecke $ce = a1$ ab, ziehe $e1$ und errichte im Halbirungspunkte m der Geraden $e1$ das gehörig verlängerte Loth f , welches die verlängerte Gerade cd im Punkte 2 schneidet. Alsdann ist 2 der Mittelpunkt des Scheitelbogens 2 . Die gemeinschaftlichen Vereinigungspunkte g und h der einzelnen Kreisbogen liegen auf den verlängerten Strahlen 21 , bezw. 23 .

Für einen überhöhten, aus 3 Mittelpunkten beschriebenen Korbbogen cah ist in Fig. 258 die nun ohne Weiteres verständliche Zeichnung gegeben.

Bei der in Fig. 259 veranschaulichten Darstellung eines gedrückten Korbbogens mit 3 Mittelpunkten ist aus der Seite ad (halbe Spannweite) und der Seite dc (Pfeilhöhe) das Rechteck $adch$ gezeichnet, hierauf die Diagonale ac desselben gezogen und danach die Halbierung der Winkel hac und hca vorgenommen. Die von a und c ausgehenden Halbierungsstrahlen treffen sich im Punkte e , welcher gemeinschaftlicher Punkt der hier zusammen tretenden Kreisbogen wird. Von e ist das Loth ef auf die Diagonale ac gefällt und gehörig erweitert, um in seinem Schnittpunkte 1 mit ad und im Schnitte 2 mit der verlängerten Geraden cd die gesuchten Mittelpunkte 1 und 2 für die Bogen 1 und 2 zu liefern.

Der Mittelpunkt 3 für den Bogen 3 liegt symmetrisch mit Punkt 1 . Dieselbe Construction gilt auch für den überhöhten Korbbogen.

2) Korbbogen aus 5 Mittelpunkten. Beim gedrückten Korbbogen in Fig. 260 ist ab die Spannweite und dc die Pfeilhöhe. Obgleich die Halbmesser für den Scheitelbogen und für den Ansatzbogen am Kämpfer von im Allgemeinen beliebiger, nur innerhalb gewisser Grenzen liegender Länge genommen werden können, so empfiehlt es sich doch aus statischen Gründen, wie aus Rücksichtnahme

Fig. 257.

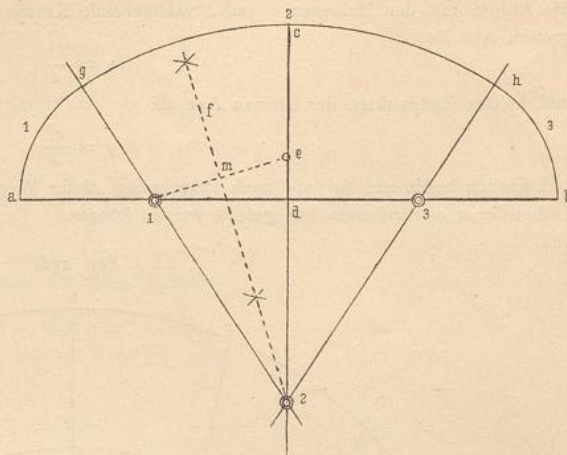


Fig. 258.

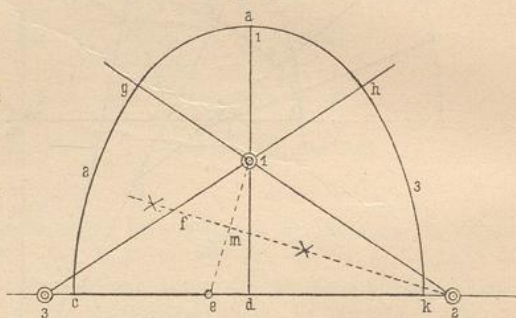
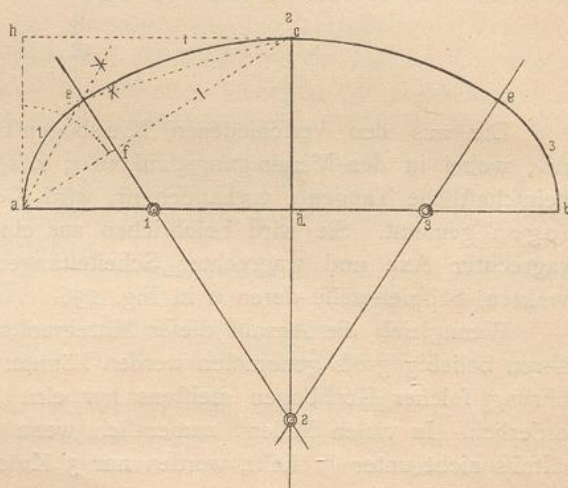


Fig. 259.



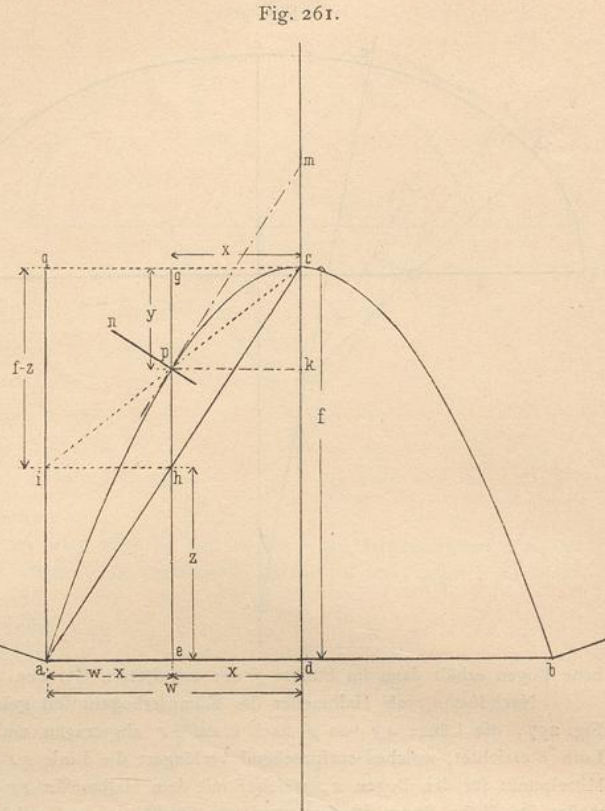
Man ziehe cq parallel zu ad , aq parallel zu cp und die Gerade ac . Zieht man nunmehr durch den beliebigen Punkt e der Geraden ad die Parallele eg zu dc , so schneidet dieselbe die Linie ac im Punkte h . Führt man durch h parallel zu ad die Gerade hi , welche die Gerade aq in i schneidet und verbindet man i mit c durch eine gerade Linie, so trifft dieselbe die Gerade eg in einem Punkte p , welcher ein Punkt der gefuchten Parabel ist.

Nimmt man pk parallel zu ad und $kc = cm$, so ist der Strahl mp nach bekannten Eigenschaften der Parabel Tangente in p , und das in p auf pm errichtete Loth ist die Normale für diesen Punkt.

Dafs p ein Punkt der Parabel ist, ergibt sich unter Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Fig. 261 in folgender Weise. Auf Grund der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke gpc und qic ist $\frac{y}{x} = \frac{(f-z)}{w}$, demnach

$$y = (f-z) \frac{x}{w} \quad \dots \quad 108.$$

Da ferner $\Delta cha \sim \Delta cea$ ist, so folgt $\frac{z}{w-x} = \frac{f}{w}$, mithin



$$z = \frac{f}{w} (w-x) \quad \dots \quad 109.$$

Führt man diesen Werth von z in Gleichung 108 ein, so erhält man den Ausdruck

$$y = \frac{f}{w^2} x^2, \quad \dots \quad 110.$$

welcher der Gleichung der Parabel entspricht, deren Axe mit der Coordinatenaxe cd zusammenfällt.

Steht wie in Fig. 262 dc schiefwinkelig auf ab im Halbierungspunkte d , so sind ab und cd conjugirte Durchmesser der Parabel und aus der hier als bekannt vorausgesetzten Uebereinstimmung der Form der Gleichung der Parabel, bezogen auf ein System conjugirter Axen mit der Scheitelgleichung 110 derselben, folgt, dafs alle Eigenschaften der Parabel, welche vom Coordinatenwinkel unabhängig sind, auch bei dem neuen System mit conjugirten Axen Giltigkeit behalten.

Von Bogenlinien in der Form von Fig. 261 u. 262

Fig- 262.

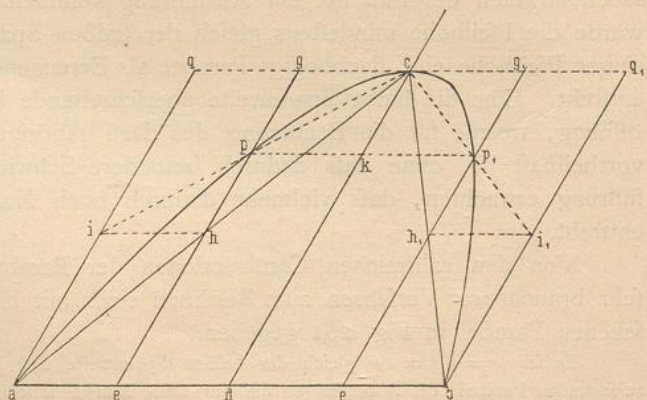
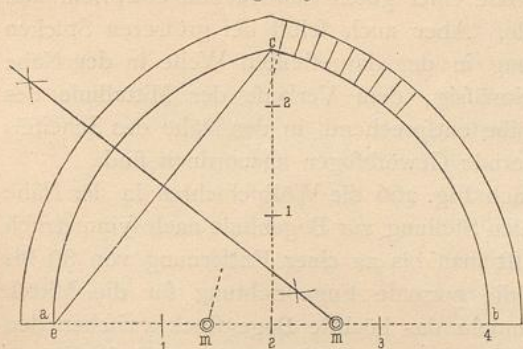


Fig. 263.



werden wir später noch Gebrauch machen.

Ist die Bogenlinie nicht stetig gekrümmt, sondern wie in Fig. 263 aus zwei in einem Punkte c , dem Scheitelpunkte, sich schneidenden Bogenchenkeln, ac und bc , die an dem Schnittpunkte einen mehr oder weniger großen Bogenwinkel bilden, zusammengesetzt, so entsteht der Spitzbogen als erzeugende Linie für das spitzbogige Gewölbe. Je nach der Größe des

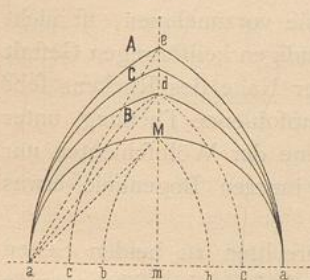
Bogenwinkels entstehen die mehr oder weniger schlanken Spitzbogen.

In Fig. 263 ist der Bogenwinkel acb , bei dem ein Pfeilverhältnis $2\frac{1}{2} : 4$ oder $5 : 8$, welches schon in früher Zeit bei den Spitzbogen Anwendung gefunden hat, zu Grunde gelegt ist, einem weniger schlanken Spitzbogen entsprechend, bietet aber für ein spitzbogiges Tonnengewölbe eine zweckmäßige Bogenlinie.

Bei der Verwendung des Spitzbogens zu Tonnengewölben sind die Schenkel desselben jeder für sich meistens aus einem Mittelpunkte zu schlagen; nur in besonderen Fällen können die Bogenchenkel für sich aus mehreren Mittelpunkten nach Art der Korboggen beschrieben werden. Die Form der Spitzbogen ist eine äußerst mannigfache und, wenn auch später bei Betrachtung der gothischen Kreuzgewölbe noch näher auf die Bildung von Spitzbogen eingegangen werden soll, so sind hier, so weit das spitzbogige Tonnengewölbe in Betracht kommt, vorweg folgende Bemerkungen zu machen.

In Fig. 264 sind einige Spitzbogen für die Spannweite aa in Zusammenstellung mit einem um m beschriebenen Halbkreise gezeichnet, wobei die Mittelpunkte b und c der Bogenchenkel B und C , wie ohne Weiteres ersichtlich, mit Hilfe der Sehnenlängen aM und ad bestimmt wurden. Der höchste Spitzbogen A hat für seinen Schenkel ein Halbmesser gleich der Spannweite, so daß der Scheitelpunkt e dieses Bogens die Spitze eines über der Spannweite errichteten gleichseitigen Dreiecks aea bildet. So lange der Mittelpunkt für die Spitzbogenchenkel innerhalb der Strecke ma bleibt, erscheint der danach gebildete Bogen weniger schlank, aber vielfach in ästhetischer und in gewissen Fällen in statischer und constructiver Beziehung günstiger. Eine Grenzlage bildet gleichsam der um a beschriebene Spitzbogen A . Rückt der

Fig. 264.



Mittelpunkt noch über die Kämpferpunkte a hinaus, so entsteht leicht eine übertrieben spitze, lanzettartige Form für die Bogenlinie. Wegen der Vielseitigkeit, welche der Spitzbogen bietet, ist in jedem besonderen Falle die Wahl seiner Form reiflichen Erwägungen zu unterwerfen. Der Umstand, daß der Spitzbogen an seinem Scheitelpunkte einen Bogenwinkel bildet, beeinflusst die Stellung der Gewölbefugen, welche für jeden Bogenchenkel nach dem ihm zugehörigen Mittelpunkte gerichtet sein sollen, in beachtenswerther Weise. Bei kleinerem Wölbmaterial wird namentlich, wie Fig. 265 zeigt, über dem Scheitelpunkte des Bogens ein häßliches und der Stabilität desselben ungünstiges System von kleinen, stark keilförmigen

128.
Spitzbogiges
Gewölbe.

Stücken angehäuft, welches in keiner Weise einer guten Construction entspricht und deshalb als fehlerhaft bezeichnet wurde. Aber auch selbst bei größeren Stücken von Wölbmaterial ist die Fugenanordnung in der dargestellten Weise in der Nähe des Scheitels zu vermeiden, da zweckmäßig, dem Verlaufe der Mittellinie des Druckes (Drucklinie) im Spitzbogengewölbe entsprechend, in der Nähe des Scheitels sich mehr der lothrechten Richtung nähernde Gewölbefugen anzuordnen sind.

Aus diesem Grunde richtet man nach Fig. 266 die Wölbefugen in der Nähe des Scheitels unter Aufgeben der normalen Stellung zur Bogenlinie nach symmetrisch liegenden versetzten Mittelpunkten. Läßt man bis zu einer Entfernung von 30 bis 40 cm auf beiden Seiten des Scheitels die normale Fugenrichtung für die Mittelpunkte *o*, bzw. *II* eintreten, so ist nunmehr das höchste Bogenstück zwischen den normalen Grenzfugen *o...o* und *II...II* für kleineres Wölbmaterial, z. B. für Ziegel, in der Weise in Schichten zu theilen, dafs, der Dicke der Ziegel und der Stärke der Fugen zwischen dem Ziegelmauerwerk entsprechend, die Theilung auf der Rückenlinie des Gewölbgebogens mit Vermeidung der fog. Schlusfuge vor-

Fig. 265.

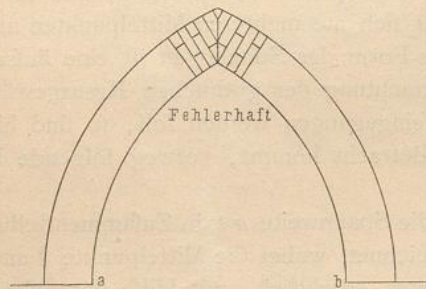
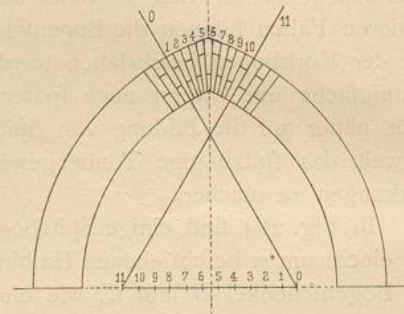


Fig. 266.

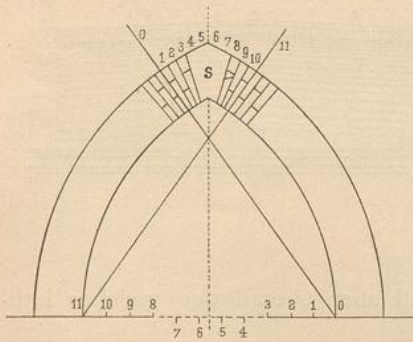


genommen wird. Die Theilung auf der inneren Bogenlinie vorzunehmen, ist nicht rätlich, weil alsdann in Folge der immerhin noch nothwendigen keilförmigen Gestalt der Wölbsteine bei der sonst üblichen Gewölbstärke in der Nähe des Rückens sehr starke Mörtelfugen erforderlich werden, während bei der empfohlenen Theilung, unter Beobachtung regelrechter Fugenstärken, die einzelnen Steine der Wölbefugen nur ein mäßiges Verhauen erleiden oder in der Nähe der inneren Bogenlinie etwas schwächere Fugen als oben am Rücken erhalten.

Da die Theilung von der gedachten Scheitel-Lothrechten zu beiden Seiten symmetrisch liegt, also für den Schlusstein eine volle Steinschicht eingeführt werden muß, so hat man immer für die zu theilende Strecke zwischen den Grenzfugen eine ungerade Zahl von Wölbefugen anzuordnen. Diese Zahl ist nun maßgebend für das Festlegen der Richtungslinien der einzelnen Fugen, indem die Verbindungslinie der Hauptmittlepunkte *o...II* in dieselbe Anzahl gleicher Theile zerlegt wird. In der Zeichnung sind 11 Theilpunkte angewandt, und nunmehr richtet sich Fuge *1* nach der Geraden *1...1*, *2* nach der Linie *2...2* u. f. f.

Eine gleiche Anordnung des Fugenschnittes im Scheitel ist auch für Spitzbogen, welche aus Bruchstein- oder Quadermaterial hergerichtet werden sollen, zu empfehlen.

Fig. 267.

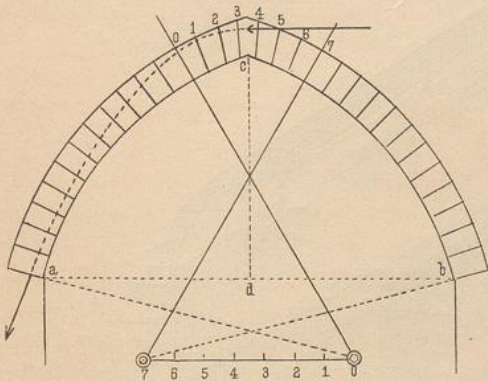


Zuweilen fügt man auch selbst dann, wenn Ziegelmaterial verwendet wird, unter theilweiser Beibehaltung der eben beschriebenen Fugenanordnung, nach Fig. 267 eine besonders aus größeren Thonsteinen gebrannte oder aus Werkstücken (Quadern) bearbeitete Schlussteinschicht *S* ein, was namentlich bei steileren Spitzbogen rätlich ist, da alsdann ein Verhauen der einzelnen, wenn auch wenigen Schichten in der unmittelbaren Nähe des Scheitels vermieden wird.

Bei steilen Spitzbogen kann die Grenzlage, bis zu welcher die normale Fugenrichtung beibehalten wird, schon mit einem Neigungswinkel von etwa 45 Grad zur Wagrechten *o...II* angenommen werden, während bei weniger steilen, fog. stumpfen Spitzbogen die schon oben angegebene höhere Grenzlage ohne Nachtheil für die Ausführung eingeführt werden kann.

Werden die Mittelpunkte *o* und *7* (Fig. 268) unter die wagrechte Verbindungslinie *ab* der Kämpferpunkte gelegt, so entsteht der gedrückte Spitzbogen.

Fig. 268.



Wird dabei die Pfeilhöhe *cd* kleiner, als die halbe Spannweite *ad*, so erhält man den flachen Spitzbogen.

Die Anwendung des gedrückten Spitzbogens, dessen Fugenschnitt aus der Zeichnung ersichtlich ist, eignet sich aus statischen Gründen, weil im Allgemeinen ein günstiger Verlauf der Mittellinie des Druckes sich nachweisen läßt, meistens vortheilhaft zur Ausführung spitzbogiger Tonnengewölbe.

Eben so wie aus zwei Kreisbogenchenkeln ein Spitzbogen gebildet werden kann, würde man auch aus zwei symmetrischen elliptischen Bogen oder aus zwei

symmetrischen Korbbogen einen Spitzbogen construiren und danach ein entsprechendes Tonnengewölbe herstellen können. In der Anwendung sind alsdann alle diejenigen Punkte wieder zu berücksichtigen, welche bereits bei den elliptischen und Korbbogen-Gewölben Erwähnung gefunden haben. Auf die elliptischen Spitzbogen-Gewölbe wird noch bei den »Tonnengewölben mit fog. Stichkappen« und bei den »Netzgewölben« hinzuweisen sein.

Werden gerade Tonnengewölbe in größerer Länge zur Ueberdeckung eines Raumes in Anwendung gebracht, so erscheint die wagrechte Scheitellinie des Gewölbes dem Auge des Beschauers nicht mehr als eine wirkliche Wagrechte, sondern als eine nach unten schwach durchgebogene Linie. Diese optische Täufchung zieht natürlich das Anfehen des Gewölbes in unangenehme Mitleidenchaft. Um diesen Eindruck zu verwischen, läßt man bei derartigen längeren Tonnengewölben (Fig. 269) die Axen von den Stirnmauern bis zur Mitte des Raumes schwach geneigt an-

129.
Tonnengewölbe
mit Stich.

steigen, oder wie gefagt wird, man läßt das Gewölbe »mit Stich« verfehen. Die Scheitellinie und die Kämpferlinien erhalten dann als Parallele zur Gewölbaxe denselben Stich.

In folchem Falle bilden die beiden cylindrischen Gewölbkörper *A* und *B*, da ihre Axen nicht mehr rechtwinkelig zu ihren Stirnebenen stehen, schiefe cylindrische Körper, welche in einer sog. »Naht« oder in einem »Grat« *mb* zusammentreffen, sonst aber überall den gleichen lothrechten Querschnitt besitzen.

Das schräge Ansteigen *ab*, bezw. *cb* der Kämpferlinien kann beim Vorhandensein wagrecht geführter Kämpfergefimfe jedoch von nachtheiliger Wirkung werden; um dieses zu vermeiden, ordnet man das Gewölbe nach Fig. 270 bei wag-

Fig. 269.

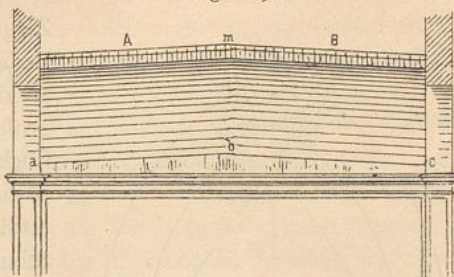
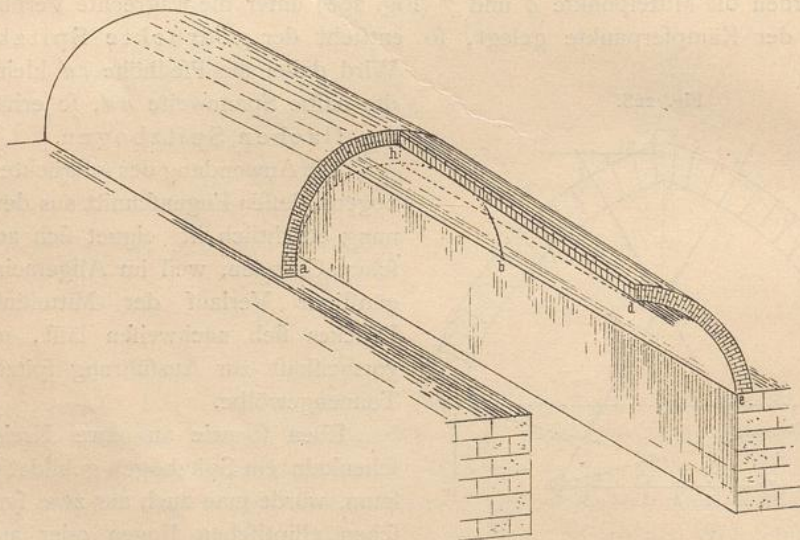


Fig. 270.



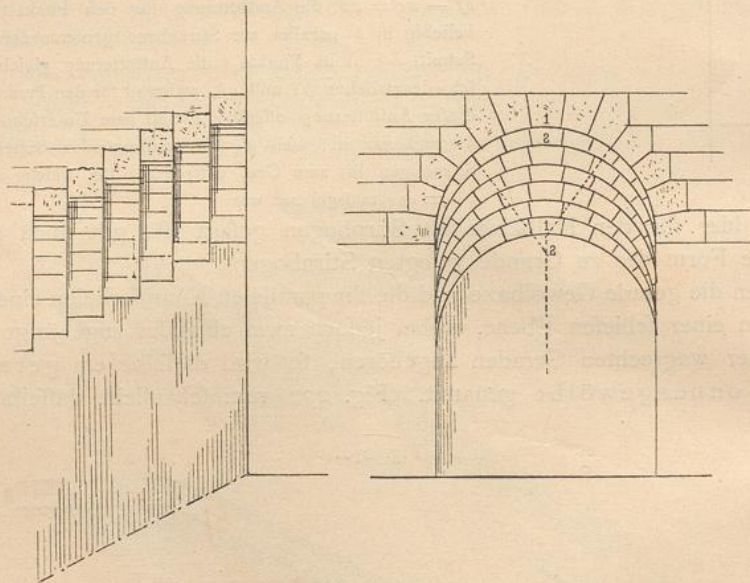
rechten Kämpferlinien so an, daß die Scheitellinie bis zur mittleren Bogenlinie, welche eine andere Form *ahb* als die Bogenlinie der Stirn erhält, in entsprechender Weise ansteigt. Die Folge hiervon ist, daß die sämtlichen lothrechten Schnitte, parallel zur Stirnebene gelegt, verschiedene Bogenlinien aufweisen müssen. In der praktischen Ausführung solcher Gewölbe wird aber auf dem den Körper des Gewölbes tragenden Gerüste, wovon später erst die Rede sein kann, ohne von vornherein die Wöblinien zu ändern, vermöge des nur geringen Stiches, an den nothwendigen Gerüststellen eine schwache Auffütterung von Holzstücken vorgenommen, welche in ihrer Höhe der Stichhöhe in den zugehörigen Punkten entsprechen.

Um die Höhen der Auffütterungen an verschiedenen Stellen zu bestimmen, kann man nach Anleitung von Fig. 271 verfahren.

ein Grat *a*. Derartige Tonnengewölbe finden in der Regel nur bei Treppenanlagen Verwendung und sind auch hierfür schon in früher Zeit in großartiger Weise zur Ausführung gelangt.

Wenngleich der praktischen Herrichtung dieser Gewölbe besondere Schwierigkeiten nicht entgegenstehen, so wurden doch namentlich im Mittelalter derartige steigende Gewölbe aus einzelnen, neben einander stehenden, kürzeren Gewölben, sog. »Gurten« oder »Zonen«, deren Kämpfer einer staffelartigen Anordnung folgen, zusammengefügt. Diese Constructionsweise, welche in Fig. 273 in Ansicht und

Fig. 273.



Längenschnitt dargestellt ist, eignet sich besonders für Quader als Wölbmaterial. Auch bei den in dieser Weise auszubildenden Gewölben ist bei der Wahl der Bogenlinie die größte Freiheit vorhanden.

131.
Schrauben-
förmig
steigendes
Tonnen-
gewölbe;
Schnecken-
gewölbe.

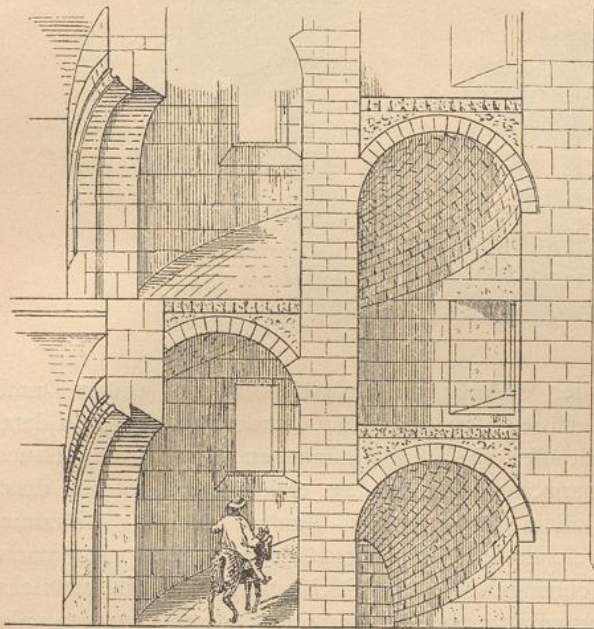
Sind die Axe und die Kämpferlinien eines Gewölbes Schraubenlinien, bei deren Festlegen die beiden zusammengehörigen Kämpferpunkte der Bogenlinie, welche die Laibungsfläche desselben erzeugt, die Endpunkte einer geraden wagrechten Linie bilden, so nennt man dasselbe ein schraubenförmig steigendes Tonnengewölbe oder ein Schneckengewölbe (Fig. 274). Derartige Gewölbeanlagen können über massiven Wendeltreppen, Reitrampen im Inneren eines Bauwerkes und in sonst geeigneten Fällen Platz greifen. Kommt bei denselben Werkstein als Wölbmaterial zur Benutzung, so ist ein besonderer Steinfugenschnitt, wovon später (unter *c*) die Rede sein wird und welcher in Fig. 274 angedeutet ist, in Anwendung zu bringen. Treten mit den Schneckengewölben Podestgewölben *abcd* zusammen, deren Kämpferlinien *ad* und *bc* einer wagrechten Ebene angehören, so bilden die Schnittlinien über *ab*, bzw. *cd* Grate, welche jedoch genau der erzeugenden Bogenlinie entsprechen.

132.
Ringgewölbe.

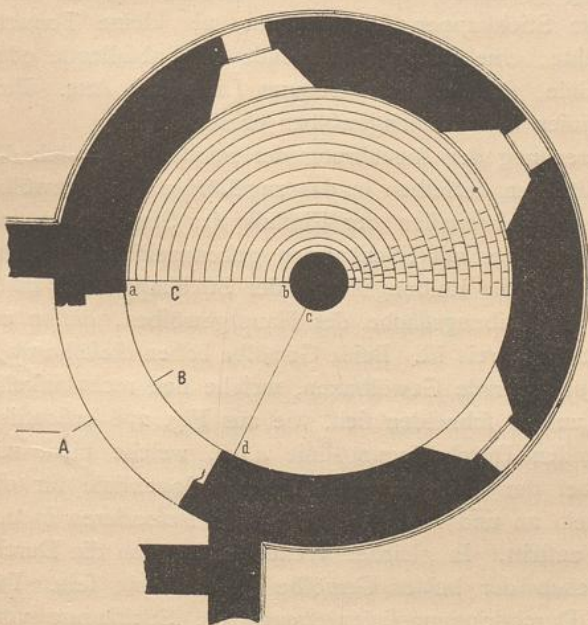
Ist die Axe eines Gewölbes eine in einer wagrechten Ebene liegende, gesetzmäßig gebildete Curve und sind die in derselben Ebene liegenden Kämpferlinien

der Axe derartig entsprechend genommene Curven, daß in der winkelrecht zur Axe gestellten lothrechten Ebene der erzeugenden Bogenlinie zwei zusammengehörige Kämpferpunkte in jeder Stellung dieser Ebene immer denselben ursprünglichen Abstand von der Axe behalten, so entsteht die Laibung eines Ringgewölbes oder des ringförmigen Tonnengewölbes (Fig. 275). Am häufigsten wird die Gewölbaxe kreisförmig oder elliptisch (nur als Halbkreis, bezw. als halbe Ellipse oder vollständig geschlossen) zur Anwendung gebracht.

Fig. 274.



Schnitt AD.

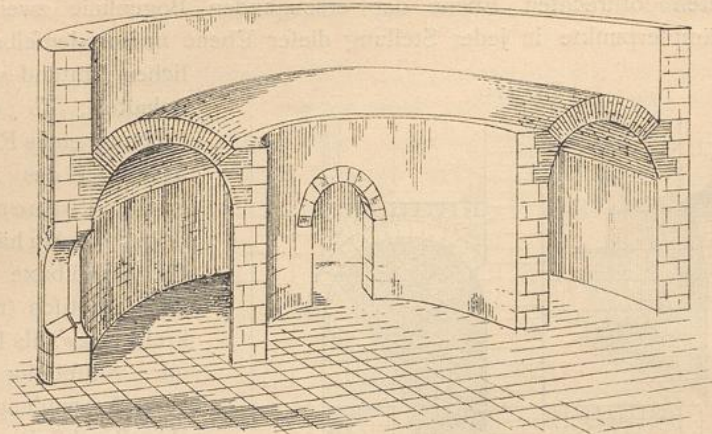


Bei Bruchstein- und Backsteinmaterial entstehen bei der Herstellung solcher Ringgewölbe verhältnismäßig keine größeren Schwierigkeiten; bei Anwendung von Haufsteinmaterial sind die einzelnen Wölbsteine nach einem leicht zu ermittelnden Fugenschnitte zu bearbeiten. Tritt an die Stelle der krummlinigen Gewölbaxe eine gebrochene gerade Linie, d. h. ein Polygonzug, so entsteht eine Nebenart des Ringgewölbes, welche mit dem Namen polygonales Tonnengewölbe bezeichnet wird. Hierbei treten die Tonnengewölbe der einzelnen Seiten des Polygons über den Ecken der Axe in einem gemeinschaftlichen Grat zusammen.

Schneiden die Gewölbflächen kleinerer Tonnengewölbe das eigentliche Hauptgewölbe, so nennt man die ersteren Stichkappen oder Lunetten und das ganze System ein Tonnengewölbe mit Stichkappen. Der Umstand, daß bei niedrig gehaltenen Widerlagern der Tonnengewölbe die Höhe des nutzbaren Raumes unter den Kämpferlinien die Anlage von nur mäßig hohen Licht- oder Durchgangsöffnungen

133.
Tonnengewölbe mit
Stichkappen.

Fig. 275.



gestattet, hat darauf geführt, an den Widerlagsmauern gleichsam noch weitere Durchbrechungen des Tonnengewölbes eintreten zu lassen, um hierdurch nicht allein durch schlankere und mit guten Verhältnissen versehene Oeffnungen eine bessere Beleuchtung und Zugänglichkeit des überwölbten Raumes zu erzielen, als solches durch Oeffnungen in den Stirnmauern allein möglich wird, sondern auch den Eindruck der Schwere und des Ernstes, welchen ein Tonnengewölbe an und für sich macht, mehr und mehr zu mildern. Tonnengewölbe mit Stichkappen sind, in wirklicher Pracht und großem Reichthum ausgestattet, bei den hervorragenden Bauwerken italienischer Renaissance zur Ausführung gekommen und können sich nach wie vor einer großen Beliebtheit erfreuen. Die Stichkappen selbst haben, als kleine Tonnengewölbe genommen, eine wagrechte, eine schräg aufsteigende oder abfallende oder auch eine gebrochene gerade Linie, seltener eine krumme Linie zur Axe. Ihre Bogenlinie entspricht den Bogenlinien des Tonnengewölbes überhaupt.

Unter c wird bei der Besprechung der Ausführung der Stichkappen noch die genaue Ausmittelung und das Einfügen derselben in das zugehörige Hauptgewölbe beschrieben werden. Hier möge nur einstweilen der Einfluss der Stichkappen auf die Gesamtbildung des Tonnengewölbes mit Stichkappen gekennzeichnet werden.

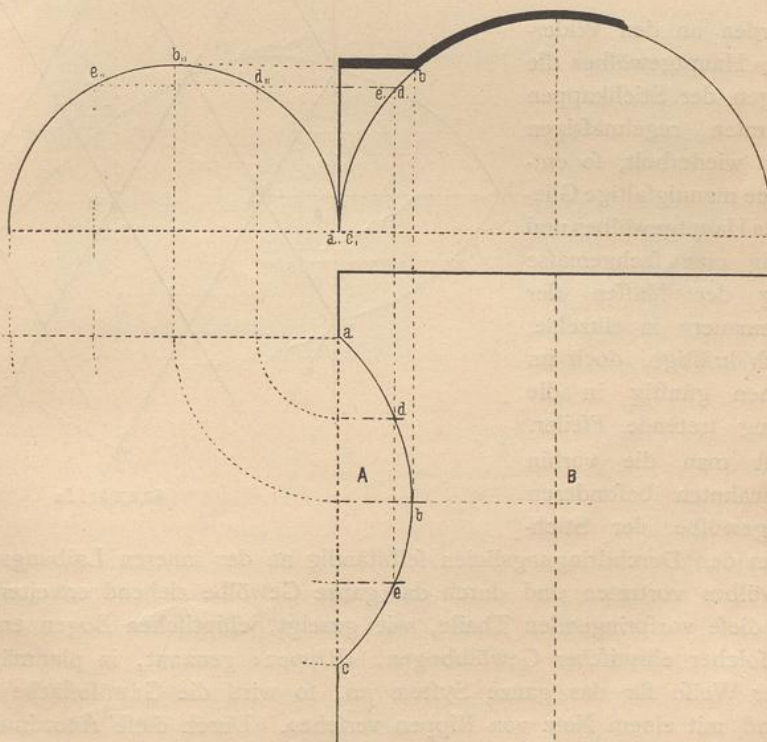
In Fig. 276 ist im Grundriß *A* die Laibungsfläche der Stichkappe mit halbkreisförmiger Bogenlinie und *B* die Laibungsfläche des Hauptgewölbes, dessen erzeugende Bogenlinie gleichfalls ein Halbkreis ist. Beide Gewölbe haben dieselbe wagrechte Ebene als Kämpferebene und gerade Gewölbaxen, welche sich rechtwinkelig treffen. Die Laibungsflächen *A* und *B* schneiden sich, wie aus Fig. 276 ersichtlich ist, in einer leicht zu bestimmenden Durchdringungslinie *abc*, welche hier, wie auch im Allgemeinen meistens bei der Wahl einer bestimmten Bogenlinie für die Stichkappe der Fall ist, nicht allein an und für sich, sondern im Besonderen in der wagrechten Projection als Curve auftritt. In gleicher Weise würde auch die Durchdringungslinie für die Rückenflächen der beiden Gewölbe zu ermitteln sein. Die Fläche zwischen diesen beiden Durchdringungslinien trennt die Stichkappe vom Hauptgewölbe, und dieselbe kann als Laibungsfläche eines besonderen, mit bestimmter Stärke behafteten Gewölbes auftreten, welches sich, mit regelrechtem Fugenschnitte versehen, an das Hauptgewölbe schmiegend und in dasselbe legend, als Stütze für

die antretenden Wölbsteine desselben dienen, gleichzeitig aber für das in das Hauptgewölbe gefeckte kleinere Stichkappen-Gewölbe den Anchluss und die weitere Stütze gewähren muss.

Hierin ist der Grundsatz für die Construction der Stichkappen ausgesprochen.

So gut nun die wagrechte Projection der Durchdringungslinien, sei die innere oder äußere Wölbfläche dabei in Betracht genommen, neben der Bogenlinie des Hauptgewölbes von der Bogenlinie der Stichkappe abhängig gemacht wird, eben so gut kann auch umgekehrt diese Bogenlinie bei gegebenem Hauptgewölbe von einer bestimmten, vorweg vorgeschriebenen wagrechten Projection der Durchdringungslinie abhängig gemacht und unter Berücksichtigung der sonst als unveränderlich fest

Fig. 276.



liegenden Bestimmungstücke des übrigen Gewölbekörpers ermittelt werden. Und gerade unter Benutzung dieser Freiheit ist eine fernere Grundlage für die weitere Entwicklung des Tonnengewölbes erworben, welche sich bei der Anordnung der fog. Netzgewölbe, die später einer besonderen Betrachtung unterzogen werden müssen, in gewissem Grade Geltung verschafft.

In Fig. 277 ist *A* die wagrechte Projection der Laibungsfläche der Stichkappe und *B* diejenige der halbkreisförmigen Laibungsfläche des Hauptgewölbes. Beide Gewölbe besitzen dieselbe wagrechte Kämpfer Ebene. Die Weite der Stichkappe sei *ac*.

Die wagrechte Projection der Durchdringungslinie soll die gebrochene gerade Linie *abc* sein, deren Stücke Seiten eines gleichschenkeligen Dreieckes mit der Grundlinie *ac* bilden. Die hiernach zu findende Bogenlinie *abc* der Stichkappe ist aus Bogenstücken zusammengesetzt, welche im vorliegenden Falle Ellipsen angehören und, wie aus Fig. 277 hervorgeht, in leicht ersichtlicher Weise gefunden werden

können. So ist z. B. $fh = ik$ und $gr = ut = mn$. Man erhält also für das in das Hauptgewölbe gesteckte Gewölbe einen »elliptischen Spitzbogen« als erzeugende Bogenlinie.

In der lothrechten Ebene ab erscheint die Durchdringungslinie als Theil az einer Ellipse, welche im Viertel als azw dargestellt und deren halbe große Axe av , deren halbe kleine Axe vw gleich dem Halbmesser xy der Bogenlinie des Hauptgewölbes ist. Im Schnitt fg ist C die lothrechte Projection der Stichkappenfläche.

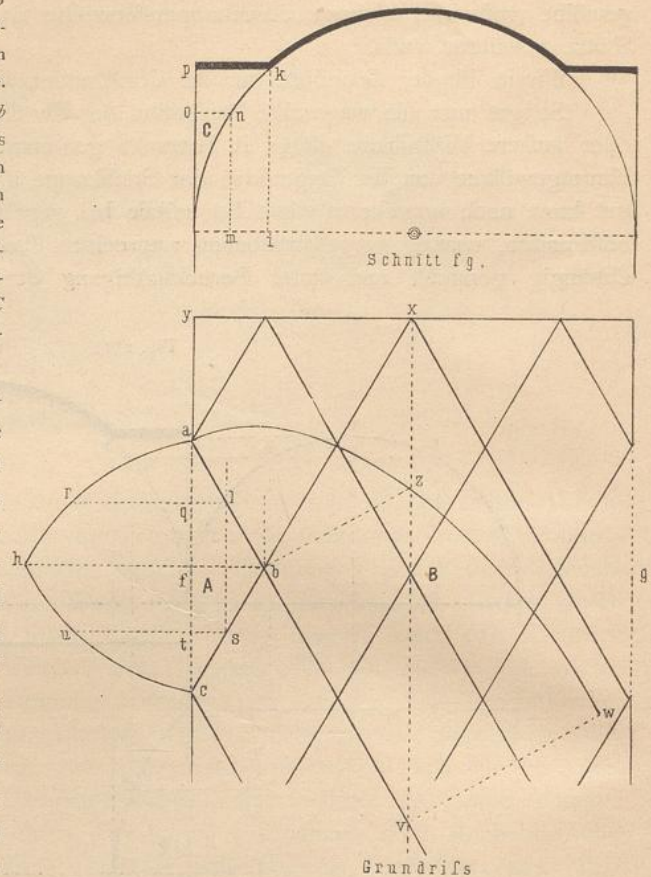
Werden an den Widerlagern des Hauptgewölbes die Einfügungen der Stichkappen in bestimmten, regelmäßigen Abständen wiederholt, so entspringt eine mannigfaltige Gliederung des Hauptgewölbes und gleichzeitig eine fachgemäße Auflösung der Massen der Widerlagsmauern in einzelne, wenn auch kräftige, doch im Allgemeinen günstig in die Erscheinung tretende Pfeiler.

Läßt man die vorhin schon erwähnten besonderen Anflufsgewölbe der Stich-

kappen an den Durchdringungslinien selbständig an der inneren Laibungsfläche des Hauptgewölbes vortreten und durch das ganze Gewölbe ziehend erweitern; ordnet man, da diese vorspringenden Theile, wie gezeigt, elliptischen Bogen entsprechen, mehrere solcher elliptischer Gewölbobogen, »Rippen« genannt, in planmäßiger und decorativer Weise für das ganze System an, so wird die Gewölbfläche in Muster zerlegt und mit einem Netz von Rippen versehen. Durch diese Anordnung ist der Vorläufer für das eigentliche »Netzgewölbe« erzeugt. Treten hier die Rippen nur als ein Schmuck der Tonnengewölbe auf, so werden dieselben bei den Netzgewölben des Mittelalters als eigentliche Träger der Füllgewölbe der einzelnen Felder oder Maschen des Netzes in Anspruch genommen und bieten damit ein Mittel für eine reiche und reizvolle Durchbildung gewölbter Decken nicht allein bei regelmäßig, sondern auch, da die Netzbildung weit gehende Freiheiten gestattet, bei unregelmäßig im Grundrifs auftretenden Räumen.

Ist die Gewölbaxe gh eines Tonnengewölbes (Fig. 278) nicht rechtwinkelig zur Stirnebene ab , bzw. cd eines Gewölbes gerichtet, so entsteht ein schiefes Gewölbe. Als Maß der Schiefe gilt die Größe des Winkels δ , um welchen die Richtung der Gewölbaxe von dem Lothe ik zur Stirnebene abweicht. Wenngleich die schiefen Gewölbe im Hochbauwesen thunlichst vermieden werden, so können

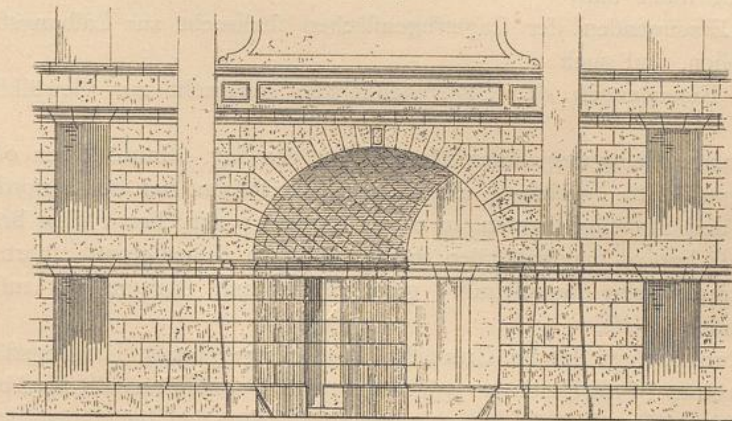
Fig. 277.



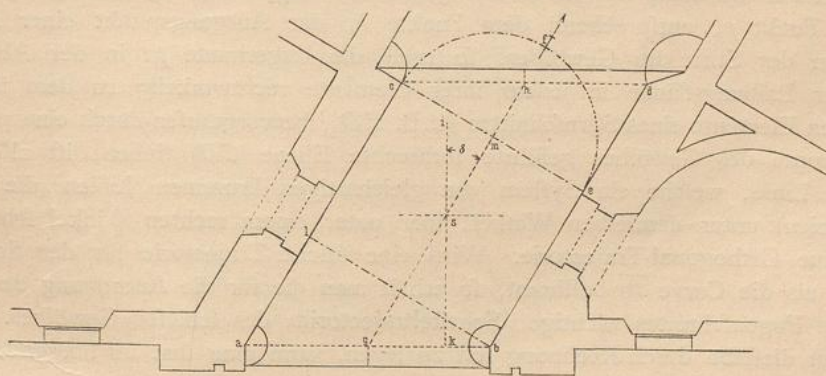
doch Fälle eintreten, wie z. B. bei Durchfahrten u. f. w., welche die Ausführung schiefer Gewölbe unter Umständen erforderlich machen.

Von größter Bedeutung für die Durchbildung der schiefer Gewölbe ist die zweckmäßige Anordnung der Lager- und Stosfugenflächen derselben. Würden die Lagerfugenflächen als Ebenen behandelt, deren Kanten gerade Linien, parallel zu den Widerlagslinien ac , bzw. bd geführt, sein sollten, so würden, wenn diese Ebenen — möchten dieselben auch senkrecht auf der cylindrischen Laibungsfläche stehen, deren Erzeugende der Normalschnitt cfe des schiefer Gewölbes ist — bis an die Stirnen des Gewölbes durchtreten, die aus den einzelnen Wölbsteinen gebildeten

Fig. 278.



Ansicht



Grundriss

Gewölbstücke über den dreieckigen Grundflächen abl und dec bei b und c , wo dieselben in einer Linie endigen, kein Widerlager besitzen, also, wenn nicht besondere gekünstelte Anordnungen und Verankerungen dieser Gewölbstücke eingeführt würden, nicht standfähig sein. Würden bei einer derartigen Wahl der Lagerfugenflächen die Stosfugenflächen in Ebenen liegend genommen, welche rechtwinkelig zu den Lagerflächen stehen, so würden auch an den Stirnen die Wölbsteine eine mangelhafte Stützfläche erhalten, während, wenn die Stosflächen in Ebenen genommen werden, welche parallel zur Stirnebene stehen, der letzte Uebelstand wohl gehoben, aber der Mangel des Widerlagers in den Punkten b und c nicht beseitigt würde.

Zur Vermeidung dieser Mifsstände ist von der gewöhnlichen Anordnung des beim geraden Tonnengewölbe auszuübenden Fugenschnittes, wonach sowohl die Lagerflächen als auch die Stofsflächen in Ebenen liegen, welche je für sich rechtwinkelig zur Laibungsfläche des Gewölbes stehen, bei den schiefen Tonnengewölben abzuweichen, und hierfür der fog. schiefe Fugenschnitt in Anwendung zu bringen. Als Regel für diesen schiefen Fugenschnitt gilt meist die Bestimmung, dafs:

- 1) die Lagerfugenkanten auf der Laibungsfläche des Gewölbes sowohl rechtwinkelig zur Stirn, als auch rechtwinkelig zu jedem ferneren parallel zur Stirnebene genommenen Stirnschnitte stehen;
- 2) die Stofs-fugenkanten rechtwinkelig zu den Lagerkanten gerichtet, also parallel zur Stirnlinie sind;
- 3) die Erzeugenden der Lagerfugenflächen senkrecht zur Laibungsfläche des Gewölbes stehen, und auch
- 4) die Erzeugenden der Stofs-fugenflächen senkrecht zur Gewölbfläche gerichtet sind.

Die strenge Befolgung dieser Regel liefert den fog. »französischen oder orthogonalen Fugenschnitt«, während ein Näherungsverfahren bei der Anordnung der Lagerfugen- und Stofs-fugenkanten zu dem in vielen praktischen Fällen brauchbaren und weit einfacher zu handhabenden fog. »englischen Fugenschnitt« führt.

Der »französische Fugenschnitt« gestaltet sich mit Bezugnahme auf Fig. 279 in der folgenden Weise.

Der Normalschnitt der im Grundrifs als $abcd$ gegebenen Laibungsfläche eines schiefen Gewölbes ist als Halbkreis afe angenommen und hiernach die Abwicklung der cylindrischen Gewölbfläche ab_1d_1c bestimmt. Für den beliebigen Punkt p der abgewickelten Stirnlinie ab_1 ist $as = x$ gleich der Bogenlänge ag und $sp = y = ih$. Ist der Punkt p , entsprechend dem Punkte h , der Ausgangspunkt einer Lagerkante an der Stirn des Gewölbes, so mufs die Lagerkante pt in der Abwicklung der Laibungsfläche in jedem ihrer Elemente rechtwinkelig zu dem ihr zugehörigen Elemente eines Stirnschnittes (z. B. CD_1 , hervorgerufen durch eine parallel zum Haupte des Gewölbes geführte lothrechte Ebene CD) stehen, ist also eine krumme Linie, welche ein System von gleichartigen krummen Linien (die Stirnschnittlinien) unter demselben Winkel, hier unter einem rechten Winkel schneidet, d. h. eine Orthogonal-Trajectorie. Wird eine solche Trajectorie für den Scheitelpunkt l als die Curve lv bestimmt, so erhält man die für die Anordnung des französischen Fugenschnittes wichtige »Scheiteltrajectorie« des schiefen Gewölbes.

Um dieselbe durch Rechnung fest zu legen, kann man ihre im Folgenden entwickelte Gleichung benutzen.

Bezeichnet r den Halbmesser des für den Normalschnitt ae gewählten Kreisbogens (hier ein Halbkreis), β das Bogenmafs für den Halbmesser 1 und α den Winkel der Schiefe, so ist, bei Annahme des rechtwinkelligen Coordinaten-Systemes XY mit dem Anfangspunkte a , für einen beliebigen Punkt $p(x, y)$ der »abgewickelten Stirnlinie« ab_1 , die Abscisse as gleich der Bogenlänge ag , d. h.

$$x = r\beta, \dots\dots\dots 111.$$

oder, wenn der zugehörige Centriwinkel amg des Bogens ag eine Gröfse von β Graden besitzt, sofort

$$x = r \frac{\pi}{180^\circ} \beta^\circ \dots\dots\dots 112.$$

Nun ist auch $\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx}$ und aus Gleichung 111 folgt

$$dx = r \cdot d\beta; \dots \dots \dots 117.$$

ferner erhält man aus Gleichung 113: $dy = r \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta \cdot d\beta$; mithin wird

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta \cdot d\beta}{r \cdot d\beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta \dots \dots \dots 118.$$

Unter Einführung der Werthe aus den Gleichungen 117 u. 118 in Gleichung 116 erhält man

$$dy_1 = - \frac{r \cdot d\beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta} \dots \dots \dots 119.$$

als Differentialgleichung der Trajectorie. Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich

$$y_1 = - \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \log. \text{ nat. } \frac{\operatorname{tg} \beta}{2} + \text{Const.} \dots \dots \dots 120.$$

Für die Constante ist zu beachten, daß für den Scheitelpunkt l

$$y = y_1 = ol = mk = r \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 121.$$

und $\sphericalangle \beta = \sphericalangle amf = 90$ Grad wird. Da $\frac{\beta}{2} = 45$ Grad, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ und der natürliche Logarithmus der Zahl 1 gleich Null ist, so folgt unter Benutzung der Ausdrücke 120 u. 121

$$r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \text{Const.},$$

und hiernach nimmt Gleichung 120 die Form an:

$$y_1 = \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \log. \text{ nat. } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) r, \dots \dots \dots 122.$$

wodurch die Gleichung der »Scheiteltrajectorie des schiefen Tonnengewölbes mit kreisförmigem Normalchnitt« ausgedrückt ist.

Beispiel. Der Winkel α der Schiefe betrage $22^\circ 30'$. Alsdann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,4142 \text{ und } \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2,4143.$$

Entsprechend den Gleichungen 112, 113 u. 122 ist für einige Werthe von β die folgende Tabelle für die Stirnlinie und Scheiteltrajectorie

Winkel der Schiefe $\alpha = 22^\circ 30'$				
β	Stirnlinie		Scheiteltrajectorie	
	x	y	$x_1 = x$	y_1
0	0	0	0	∞
30	0,5236	0,0555	0,5236	3,5938
60	1,0472	0,2071	1,0472	1,7402
75	1,3090	0,3070	1,3090	1,0544
90	1,5708	0,4142	1,5708	0,4142
Grad	r	r	r	r

berechnet. In Fig. 279 ist $\alpha = 22^\circ 30'$ und $r = 3$ m genommen. Für $\beta = 60^\circ$ ergibt sich für den Punkt q der Scheiteltrajectorie lv demnach die Abcisse $x_1 = as = \text{Bogen } ag = 1,0472 \cdot 3 = 3,1416$ m; die Ordinate $y_1 = sq = 1,7402 \cdot 3 = 5,2206$ m.

Ist in einem gegebenen einzelnen Falle die Scheiteltrajectorie lv in Verbindung mit der halben abgewickelten Stirnlinie al und der Widerlagslinie aY durch Zeichnung fest gelegt, so kann das Flächenstück $alvw$ ohne Weiteres als Lehre (Schablone) zur Bestimmung der sämmtlichen Lager- und Stofs-fugenkanten auf der abgewickelten Laibungsfläche ab_1d_1c benutzt werden. Hierbei ist nur das Folgende zu berücksichtigen.

Die Scheitellinie lz_1 scheidet die abgewickelte Fläche ab_1c_1d in die beiden Theile I und II . Für die Lager- und Stofskanten des Theiles I gleitet die Lehre mit ihrer Seite aw stets an der Widerlagslinie ac fort, während für jene Kanten des Theiles II die Lehre an der mit ac parallelen Linie b_1d_1 fortzubewegen ist.

Ist z. B. p ein Theilpunkt der Gewölbstirn (Fugenpunkt) des Theiles I , so führt man die Lehre mit ihrer Seite aw so lange an ac entlang, bis die Curve lv mit einem Elemente durch den Punkt p läuft, und zeichnet alsdann das auf die Fläche I von lv fallende Curvenstück pt als Lagerkante vor. Die Stofs-fugenkanten sind am Stirnbogenstücke al vorzuzeichnen. Würde etwa der Punkt q der Ausgangspunkt einer solchen Kante sein, so verschiebt man die Lehre an ac so lange, bis ein Element der Stirnlinie al durch q läuft, und zeichnet qq_0 als Stofskante ein.

Ist dagegen A ein Fugenpunkt des Theiles II , so läßt man bei umgekehrter Lage der Lehre die Seite aw so an d_1b_1 gleiten, bis die Scheiteltrajectorie durch A zieht. Trifft eine solche Kante die Scheitellinie lz_1 in einem Punkte l_1 , so bildet dieser die Grenze der Lagerkante des Theiles II , und von hier aus ist die weiterziehende zugehörige Lagerkante l_1B des Theiles I wiederum diesem Theile entsprechend zu zeichnen. Die Stofskanten des Theiles II sind mit Hilfe der Stirnlinie al , aber jetzt der Lage a_1l_1 gemäß geführt, einzutragen.

Sind für die Eintheilung des Gewölbes sämmtliche Lager- und Stofskanten der Wölbsteine auf der abgewickelten Laibungsfläche desselben eingezeichnet, so bietet die Uebertragung derselben in die wagrechte und lothrechte Projection des schiefen Gewölbes keine Schwierigkeiten, wie auch unter Berücksichtigung der oben für die Stellung der Erzeugenden der Lager- und Stofsflächen unter 3 u. 4 gegebenen Bestimmungen die Ausmittelung dieser Flächen leicht erfolgen kann.

Der Umstand, daß die Winkel, welche die Scheiteltrajectorie mit den zur Kämpferlinie parallelen geraden Mantellinien der Laibungsfläche bildet, vom Scheitelpunkte aus stetig abnehmen, bis sie, da die Trajectorie sich der Kämpferlinie asymptotisch nähert (nach Gleichung 122 ist für $\beta = 0$ die Ordinate $y_1 = \infty$ gefunden) auch nach der Kämpferlinie hin immer mehr dem Werthe Null zusteuern, hat zur Folge, daß bei der Ausführung, namentlich in Werkstücken, sämmtliche Steine einer Schicht verschiedene Breiten und Gestaltungen erhalten und daß, abgesehen von Steinen, welche symmetrisch rechts und links zur Gewölbaxe bei sorgfältiger Theilung im Gewölbkörper angeordnet sind, alle Wölbsteine nach verschiedenen Abmessungen bearbeitet werden müssen, ja, daß bei Kreisgewölben mit einigermaßen großem Centriwinkel selbst mehrere neben einander liegende Schichten so dünn werden, daß dieselben zu einer Schicht zu vereinigen sind, um dieselben dann in geeigneter Breite gegen eine andere breitere Schicht treten zu lassen. Derartige im Gefolge der Beobachtung des strengen Fugenschnittes stehende Anordnungen erhöhen die Schwierigkeiten der Ausführung schiefer Gewölbe in mancherlei Weise, und man bedient sich aus diesem Grunde häufig beim Fugenschnitte der schiefen Gewölbe eines Näherungsverfahrens.

Ein solches Verfahren besteht im Allgemeinen darin, daß die Trajectorien auf der Abwickelungsfläche der Gewölbelaibung durch parallele gerade Linien ersetzt werden, welche, auf die Laibung zurückgebracht, Schraubenlinien für die Lagerkanten liefern. Die Stofskanten sind in der Abwickelungsfläche wiederum rechtwinkelig zu den Lagerkanten genommene gerade Linien, welche, auf die Laibung übertragen, wiederum Schraubenlinien ergeben. Ist der Normalchnitt und nicht der

Stirnbogen des schiefen Gewölbes bei dieser Fugenanordnung ein Halbkreis oder ein Kreissegment, so ist man bei sorgfältiger Theilung der Wölbflächen im Stande, den sämtlichen Wölbsteinen, mit Ausnahme der Stirn- und Kämpfersteine, congruente Laibungsflächen zu geben.

Die Lager- und Stofsflächen besitzen gerade Linien als Erzeugende, welche senkrecht zur Laibung stehen. Da die Lagerkanten in der Abwicklung parallele gerade Linien sind, so schneidet jede derselben die zur Kämpferlinie des Gewölbes parallelen Mantellinien stets unter demselben Winkel, dem »constanten Fugenwinkel«.

Auf diesen Grundsätzen beruht der sog. »englische Fugenschnitt«, welcher in der Ausführung weit weniger Umstände verursacht, als der vorhin besprochene französische Fugenschnitt.

Zur näheren Erklärung des »englischen Fugenschnittes« möge Fig. 280 dienen.

In derselben ist S ein Theil des Grundrisses des schiefen Gewölbes mit der Axe XX , L die Abwicklung der inneren, R die der oberen Gewölbfläche und K der in der Ebene NN stehende Normalchnitt des Gewölbes, welcher als Halbkreis gewählt ist.

In der abgewickelten Gewölbfläche L ist die maßgebende Lagerkante durch den an der Stirn befindlichen Kämpferpunkt γ , welcher dem Punkte e in S auf NN entspricht, als gerade Linie γG rechtwinkelig zur geraden Verbindungslinie $f\gamma$ der Endpunkte der abgewickelten Stirnlinie gelegt, so daß γG die Richtung aller Lagerkanten, G, H u. f. w., $f\gamma$ die Richtung aller Stofskanten op, tu u. f. w., wobei letztere sonst für die einzelnen Wölbflächen im Verbands stehen, bezeichnet. Die Lagerkanten schneiden die zu der Kämpferlinie $f\gamma$ parallelen Mantellinien unter dem constanten Fugenwinkel α ; die Stofskanten treffen diese Mantellinien unter einem Winkel $90^\circ - \alpha$.

Durch diese Anordnung ergibt sich die abgewickelte Laibungsfläche eines Wölbsteines z. B. als das Rechteck $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Zur Bestimmung der Lager- und Stofskanten auf der abgewickelten Rückenfläche R sind dieselben, da die Fugenflächen, welche jene Kanten enthalten, auf der inneren Gewölbfläche senkrecht stehen sollen, von den Lager- und Stofskanten der inneren Gewölbfläche abhängig zu machen. Der Punkt d_1 , welcher der Lagerkante γG angehört, liegt auf der zur Kämpferlinie γu parallelen Mantellinie Md_0 der Laibungsfläche, um eine Bogenlänge γd_0 von der Kämpferlinie entfernt. Nimmt man demnach im Normalchnitt K die zurückgeführte Bogenlänge $\gamma d_0 = \gamma d$, so ist, wenn in d die Normale dD bis zum Gewölbrücken gezogen wird, durch die Bogenlänge δD die Mantellinie auf der oberen Gewölbfläche, welche den Punkt D_1 auf der oberen Abwicklung R enthalten muß, in ihrer lothrechten Projection bestimmt.

Nimmt man ferner die Bogenlänge δx in der Abwicklung R gleich der Bogenlänge δD , so ist die durch x parallel zu γu , bezw. $g_1 v$ geführte gerade Linie xM_1 die gefuchte Mantellinie auf der Fläche R , in welcher D_1 enthalten ist. Der Punkt d_1 liegt aber auch auf der geraden Stofskantenlinie op ; die Stofsflächenfläche schneidet, da ihre Erzeugenden senkrecht zur Gewölbfläche stehen, die abgewickelte Widerlagsfläche $\gamma g_1 v u$ in einer zu $\gamma \delta$ parallelen Geraden $p q$ und ferner, der normalen Stellung jener Erzeugenden halber, die abgewickelte Rückenfläche R in einer zur geraden Verbindungslinie δh_1 , also der abgewickelten Stofskante der oberen Gewölbfläche parallelen Geraden $q r_1$. Der Schnittpunkt derselben mit der Mantellinie xM_1 ergibt den gefuchten Punkt D_1 , und die Gerade δD_1 bezeichnet die maßgebende Lagerkante auf der Abwicklung R_1 , während die maßgebende Richtung der abgewickelten Stofskanten die Gerade δh_1 ist. Auf der abgewickelten Rückenfläche ist jedoch eine rechtwinkelige Durchkreuzung der Lager- und Stofskanten, wie solches auf der Abwicklung der Laibungsfläche der Fall ist, nicht vorhanden.

Bestimmt man auf ähnlichem Wege die Lage des Punktes A_1 , so geht durch denselben die zu δD_1 parallel geführte Lagerkante $A_1 B_1$, und nunmehr wird es leicht, die obere Abwicklungsfläche $A_1 B_1 C_1 D_1$, welche der unteren Abwicklungsfläche $a_1 b_1 c_1 d_1$ eines Wölbsteines entspricht, in der aus Fig. 280 ersichtlichen Weise zu zeichnen.

Bringt man ferner die geraden Lager- und Stofsflächenkanten in die wagrechte Projection durch bekannte Operationen zurück, so erhält man die Schraubenlinien, welche in ab und dc die Lagerkanten, in ad und bc die Stofskanten des gewählten Wölbsteines auf der inneren Laibungsfläche, dagegen in AB und DC die Lagerkanten und in AD und BC die Stofskanten desselben auf der Rückenfläche des schiefen Gewölbes enthalten, während die geraden Linien aA, bB, cC und dD die Grenzerzeugenden der als Schraubenflächen auftretenden Lager- und Stofsflächen sind.

Unter Beobachtung der für den englischen Fugenschnitt geltenden Grundfätze ist in Fig. 281 ein schiefes Gewölbe, dessen Normalschnitt ein Kreisbogen mit dem Centriwinkel β ist, in Rückficht auf die weitere Fugentheilung dargestellt. Die maßgebende Lagerkante γG soll im Endpunkte γ der Kämpferlinie γq beginnen und auf der für die Stoskanten maßgebenden Richtung γa rechtwinkelig stehen; gleichzeitig soll auch im günstigsten Falle der auf der Stirnlinie $p q$ liegende Endpunkt G dieser Lagerkante ein Theilpunkt für die Gewölbstirn werden. Die Anzahl der Wölbsteine an der Stirnfläche muß aber, damit, wie bekannt, zu beiden Seiten des Schlufssteines eine gleiche Zahl von Wölbsteinen vorhanden ist, eine ungerade sein. Theilt man nun die abgewickelte Stirnlinie unter Beobachtung sonst günstiger Breitenabmessungen der Wölbsteine in eine solche ungerade Anzahl gleich großer Strecken ein, so wird im Allgemeinen ein solcher Gewölbtheilpunkt nicht sofort oder auch selbst nicht nach mehreren Theilversuchen mit dem Punkte G zusammenfallen. Tritt dieser Umstand ein, so verfährt man am besten, wenn man die Länge γq der Kämpferlinie des Gewölbes, wie bei L_0 in Fig. 281 zu ersehen ist, um ein an und für sich meistens geringes Stück $\pi \pi_1$ so abändert, daß die abgewickelte Stirnlinie durch den Punkt π_1 geht, welcher alsdann auch Endpunkt der maßgebenden Lagerkante wird. Auf diese verlegte Stirnlinie werden die Theilpunkte des Gewölbehauptes ohne Weiteres übertragen und durch dieselben die zu $\gamma \pi_1$ parallelen Lagerkanten gezogen. Die auf Verband zu ordnenden Stoskanten richten sich zunächst nach den Punkten ρ , in welchen die Lagerkanten die Kämpferlinien treffen, und nunmehr ist die Theilung der einzelnen Wölbsteine durch Stoskanten so vorzunehmen, daß, abgesehen von den Stirnsteinen, in allen Schichten lauter gleich lange Wölbsteine vorkommen.

Die Kämpfersteine bilden in ihrer Gesamtheit einen sägeförmigen Ansatz für die Wölbsteine und erhalten unter der eigentlichen nur angearbeiteten Kämpferlinie ihrer Haltbarkeit halber stets eine entsprechende Verstärkung (Ueberhöhung).

Die Stirnsteine bieten bei der Bearbeitung wohl einige Schwierigkeiten. Nur die rechts und links an den Häuptern symmetrisch liegenden Steine werden gleich groß und symmetrisch geformt. Die Stirnfugen selbst sind Schnittlinien der Schraubenflächen der Lagerflächen mit der Ebene der Stirn, also im Allgemeinen krumme Linien. Immerhin sind alle diese Umstände weit zurückstehend gegen die, welche sich bei der Herstellung der schiefen Gewölbe nach dem französischen Fugenschnitte geltend machen.

Für die keilförmige Verjüngung der eigentlichen Wölbsteine erhält man als Maß Kreisbogen mit Radien ρ und ρ_1 , welche in Fig. 281 für einen Wölbstein A eingeschrieben sind. Durch die Anwendung dieser Kreisbogen kann die Formgestaltung der Steine erleichtert werden.

Zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers ρ der Schraubenlinie für die Stosfugenkante $x_1 y_1$ am Steine A ist die von der Geraden γa abhängige Schraubenlinie maßgebend. Mit Bezugnahme auf Fig. 281 ist, wenn r den Radius $m \gamma$ des Normalschnittes des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt und α den Steigungswinkel γa derselben auf der Abwicklung L bezeichnet, allgemein

$$\rho = \frac{r}{\cos \alpha^2} \dots \dots \dots 123.$$

Es ist aber $\cos \alpha = \frac{\varphi}{\delta}$, also

$$\cos \alpha^2 = \frac{\varphi^2}{\delta^2} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + \gamma^2} \dots \dots \dots 124.$$

Aus den Gleichungen 123 u. 124 folgt

$$\rho = \frac{r}{\frac{\varphi^2}{\varphi^2 + \gamma^2}} = \frac{r}{\varphi^2} (\varphi^2 + \gamma^2)$$

oder

$$\rho = r \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\varphi} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 125.$$

Für den Centriwinkel β des als Kreisbogen genommenen Normalchnittes des schiefen Gewölbes wird

$$\varphi = \frac{\pi r}{180^\circ} \beta^\circ, \dots \dots \dots 126.$$

wodurch Gleichung 125 übergeht in

$$\rho = r + \left(\frac{180^\circ \cdot \gamma}{\pi \beta^\circ} \right)^2 \frac{1}{r} \dots \dots \dots 127.$$

Der Krümmungshalbmesser ρ_1 der Schraubenlinie für die Lagerkante $s_1 k_1$ des Steines A ergibt sich mit Hilfe der für diese Schraubenlinie in der Abwicklung maßgebenden Geraden γG , für welche der Steigungswinkel $\angle \gamma G = 90 - \alpha$ in Betracht kommt, durch den Ausdruck

$$\rho_1 = \frac{r}{\cos(90 - \alpha)^2} = \frac{r}{\sin \alpha^2} \dots \dots \dots 128.$$

Nun ist $\sin \alpha = \frac{\gamma}{\delta}$, also

$$\sin \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \varphi^2} \dots \dots \dots 129.$$

Aus der Verbindung von Gleichung 128 mit 129 folgt

$$\rho_1 = \frac{r}{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \varphi^2}} = r \left[1 + \left(\frac{\varphi}{\gamma} \right)^2 \right],$$

oder, wenn für φ der Werth aus Gleichung 126 eingesetzt wird,

$$\rho_1 = r + \left(\frac{\pi r \beta}{180^\circ \gamma} \right)^2 r \dots \dots \dots 130.$$

Ist der Normalchnitt des schiefen Gewölbes ein Halbkreis, wofür $\beta = 180$ Grad wird, so erhält man für diesen besonderen Fall, entsprechend Gleichung 127,

$$\rho = r + \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \dots \dots \dots 131.$$

und gemäß Gleichung 130

$$\rho_1 = r + \left(\frac{\pi r}{\gamma} \right)^2 r \dots \dots \dots 132.$$

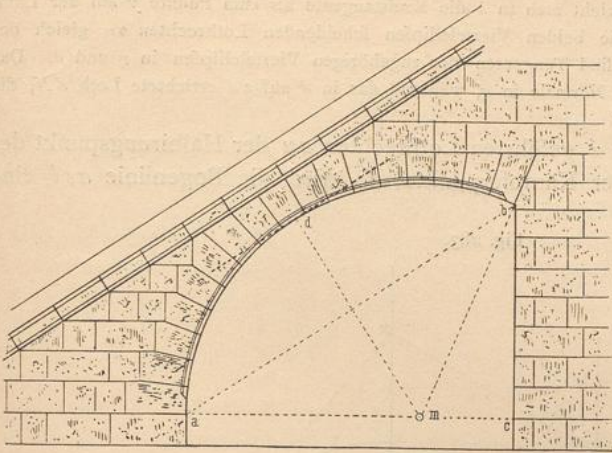
Noch möge hier die Bemerkung Platz finden, daß die Anwendung des constanten Fugenwinkels bei schiefen Gewölben eine gewisse Grenze hat, welche nicht überschritten werden darf, wenn kein Ausbauchen der Gewölbstirnen eintreten soll. Dieser Punkt kann jedoch erst bei Besprechung der Ausführung der Tonnengewölbe (unter c) näher berührt werden, wobei dann ferner unter Berücksichtigung des zur Verwendung gelangenden Wölbmaterials auch noch die Verfahren gekennzeichnet werden sollen, wonach in vereinfachter Weise die Herstellung von schiefen Gewölben für etwa vorzunehmende Deckenbildungen erfolgen kann.

^{135.}
Einhüftiges
Tonnengewölbe.

Liegen die wagrechten Kämpferlinien eines Tonnengewölbes (Fig. 282) in zwei verschiedenen wagrechten Ebenen, so heißt dasselbe kurz ein einhüftiges Gewölbe.

Der Abstand bc jener wagrechten Ebenen entspricht der »Hüfthöhe«, während die wagrechte Entfernung ac der durch a und b gehenden lothrechten Ebenen die Spannweite des Gewölbes ergibt.

Fig. 282.



Als Erzeugende der einhüftigen Gewölbe kann irgend eine gefetzmäßig gebildete ebene Curve benutzt werden. Bei gegebenen Kämpferpunkten a und b kann in vielen Fällen ein Kreisbogen Verwendung finden, welcher im tiefstgelegenen Kämpferpunkte a eine lothrechte Tangente besitzt und sonst die gerade Verbindungslinie ab als Sehne erhält. Ein derartiger um m zu beschreibender, leicht zu bestimmen der Kreisbogen hat in seinem

Halbirungspunkte d eine parallel zu ab gerichtete Tangente, welche als allgemeine Richtungslinie für den vom Gewölbe getragenen Ueberbau gelten kann.

Nicht immer kann jedoch der Punkt d Halbirungspunkt der beabsichtigten erzeugenden Bogenlinie oder die allgemeine Richtungslinie nicht parallel der Verbindungslinie ab bleiben, so daß ein Kreisbogen nicht mehr ohne Weiteres als günstig für die Erzeugende des Gewölbes erscheint. Da außerdem in mancher Beziehung der Ansatz der Erzeugenden in den Kämpferpunkten mit lothrechter Tangente erwünscht ist, so setzt man an die Stelle des Kreisbogens als Erzeugende sehr oft elliptische Bogen oder Korbbogen.

In Fig. 283 ist die Erzeugende acb aus zwei Viertelellipsen ac und bc zusammengesetzt, welche in a und b lothrechte Tangenten, in dem sonst zwischen a und b beliebig gewählten Punkte c eine gemeinschaftliche Tangente cx , welche parallel zu ab zieht, besitzen. Die Punkte der einzelnen elliptischen Bogen sind durch die fog. Vergatterung ermittelt, wobei der um b beschriebene Viertelkreis wx , dessen Halbmesser gleich der Strecke cy auf der durch den gegebenen Punkt c geführten Lothrechten zu ist, für die lothrechten Ordinaten der Ellipsenstücke maßgebend wird.

Theilt man die Strecken γa , γb und den Halbmesser bw des Viertelkreises wx proportional, so gehören den entsprechenden proportionalen Theilpunkten die aus dem Viertelkreise zu entnehmenden lothrechten Ordinaten den gesuchten Ellipsenpunkten an.

Die proportionale Theilung erfolgt einfach mit Hilfe des Dreieckes aub , dessen Spitze u beliebig auf der durch c geführten Lothrechten zu angenommen ist, und mittels des Dreieckes bww , dessen Seite bw auf der Lothrechten yb gleich der Strecke γu gemacht wurde.

Zieht man durch den beliebig genommenen Punkt β_1 der Strecke γb die Lothrechte gf , wobei f auf ub liegt, alsdann durch f die Gerade he parallel zu ab , durch e die Lothrechte ed , so ist β_1 ein dem Theilpunkte β der Strecke γb entsprechender proportionaler Theilpunkt der Strecke γa .

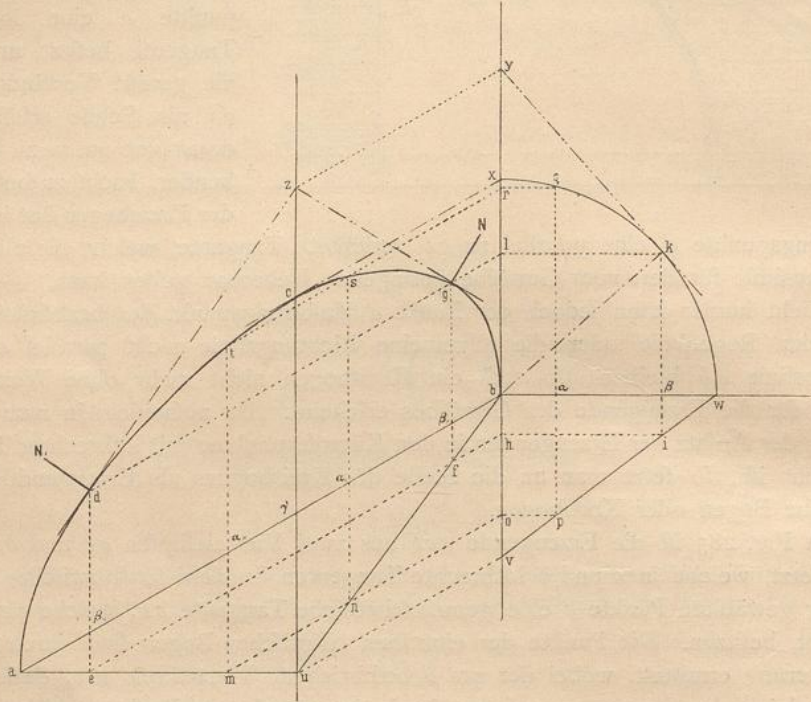
Führt man durch h den Strahl hi parallel bw und durch i die Lothrechte ik , so ist β wiederum ein Punkt, welcher bw in demselben Verhältnisse theilt, wie der Punkt β_1 die Strecke γb und der Punkt β_1 die Strecke γa zerlegt. Die Ordinate βk des Viertelkreises wx liefert die Länge der lothrechten Ordinaten β, g und β, d für die gesuchten Punkte d und g der zugehörigen Viertelellipsen. Auf gleiche Weise sind noch die Punkte s und t bestimmt.

Um die Normalen in einzelnen Ellipsenpunkten fest zu legen, verfährt man am einfachsten wie folgt.

Soll dies z. B. für die einander zugeordneten Punkte g und d geschehen, welche dem Punkte k des Viertelkreises wx entsprechen, so zieht man in k die Kreistangente bis zum Punkte y auf der Lothrechten by und nimmt γz auf der die beiden Viertelellipsen scheidenden Lothrechten zu gleich der Strecke by . Die Strahlen zg und zd sind Tangenten der zugehörigen Viertelellipsen in g und d . Das in g zu zg errichtete Loth gN ist die Normale in g , während das in d auf zd errichtete Loth dN_1 die Normale im Ellipsenpunkte d wird.

Ist der Punkt γ der durch c geführten Lothrechten zu der Halbirungspunkt der geraden Verbindungslinie ab der Kämpferpunkte, so wird die Bogenlinie acb eine

Fig. 283.



halbe Ellipse mit den halben conjugirten Durchmessern $\gamma a = \gamma b$ und γc und mit γ als Mittelpunkt.

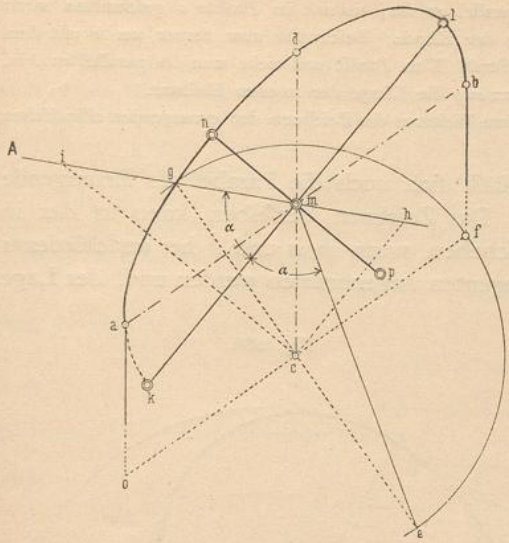
In folchem Falle ist die Ermittlung der Ellipsenpunkte eben so zu bewirken, wie in Fig. 283 gezeigt wurde. Häufig ist es jedoch rathsam, die Ellipse mit Benutzung ihrer reellen Axen zu zeichnen, deren Bestimmung in folgender Weise geschehen kann ¹⁵⁹⁾.

Es mögen in Fig. 284 ab als Verbindungslinie der Kämpferpunkte, $ma = mb$ und $mc = md$ als halbe conjugirte Durchmesser der Ellipse gegeben sein; gesucht werden die reellen Axen kl und np derselben.

Man ziehe durch c die Gerade of parallel zu ab und nehme $cf = co$ gleich dem halben conjugirten Durchmesser ma ; alsdann beschreibe man um c mit dem Halbmesser cf einen Kreis, welcher das in c auf of errichtete Loth in g und e trifft; verbinde den bekannten Mittelpunkt m der Ellipse mit dem Punkte g durch den Strahl A und mit e durch die Gerade me und halbire den Winkel gme ; alsdann giebt die Halbirlinlinie mk dieses Winkels die Lage der einen reellen Axe und das in m auf mk errichtete Loth nm die Lage der zweiten reellen Axe der Ellipse.

¹⁵⁹⁾ Siehe: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. Bearbeitet von H. SCHRÖDER. Leipzig 1867.

Fig. 284.

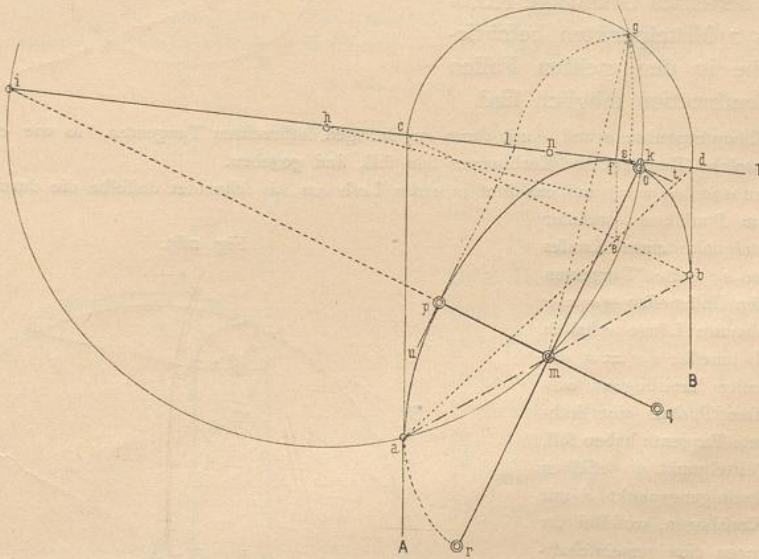


Um die Größe derselben zu finden, ziehe man ch parallel zu mk und ci parallel zu pn ; alsdann wird $mh = mp = nm$ gleich der halben Axe np und $mi = mk = ml$ gleich der halben Axe kl . Mit Hilfe dieser beiden reellen Axen ist die Ellipse nach bekanntem Verfahren zu construiren.

Recht oft sind die beiden lothrechten Tangenten der festen Kämpferpunkte a und b (Fig. 285), so wie eine in bestimmter Richtung vorgeschriebene dritte Tangente für die elliptische Erzeugende des einhüftigen Gewölbes gegeben, und hiernach ist die zugehörige Curve zu ermitteln. Mit Anwendung der Sätze der synthetischen Geometrie kann man sich in folchem Falle der in Fig. 285 gegebenen Lösung bedienen.

Die beiden durch die gegebenen Kämpferpunkte a und b gehenden Lothrechten A und B sollen zwei parallele Tangenten der gefuchten Ellipse sein; die dritte veränderliche, hier gegebene, Tangente sei T . Zur Bestimmung des Berührungspunktes f dieser Tangente mit der Ellipse verbinde man die Schnittpunkte c und d des Strahles T mit den Tangenten A und B durch die geraden Linien ad und bc und ziehe durch den Schnittpunkt e derselben den Strahl ef parallel zu A , bzw. B ; alsdann ist f der

Fig. 285.



gefuchte Berührungspunkt. Errichtet man in f das Loth auf T und beschreibt man über cd einen Halbkreis um n , so wird auf jenem Lothe ein Stück fg abgeschnitten, welches für die weitere Untersuchung von Wichtigkeit ist (Potenz der Involution).

Legt man durch den Punkt m , welcher Mittelpunkt der Ellipse ist, und durch den Punkt g einen Kreis, dessen Mittelpunkt h auf dem Strahle T liegt und welcher diesen Strahl in den Punkten i und k schneidet, so bestimmen die von i durch m und von k ebenfalls durch m geführten geraden Linien ir und kr die Lage der reellen Axen der gefuchten Ellipse.

Um die Größe der Axen zu erhalten, beschreibe man um i mit dem Halbmesser ig den Kreisbogen gs bis zum Punkte s auf T und ziehe st parallel zu im , bis mk im Punkte o geschnitten wird; alsdann ist $mo = mr$ die Länge einer halben Axe der Ellipse. Beschreibt man ferner um k mit dem Halbmesser kg einen Kreisbogen, bis derselbe den Strahl T in l trifft und zieht man lu parallel zu km , bis die Gerade im in p getroffen wird, so ist $mp = mq$ die Länge der zweiten Halbaxe.

Nach Festlegen dieser reellen Axen erfolgt ohne Weiteres das Zeichnen der erzeugenden elliptischen Bogenlinie $apfob$ des einhöftigen Gewölbes.

Statt einer elliptischen Bogenlinie läßt sich auch die Parabel als Erzeugende eines einhöftigen Gewölbes verwenden. Das Zeichnen derselben kann in der in Fig. 262 (S. 154) angedeuteten Weise geschehen, wenn in a und b bei verschiedener Höhenlage derselben auch lothrechte Tangenten angenommen werden und, der Lage der Punkte a , b und c entsprechend, die für die Ermittlung der Parabel maßgebenden Dreiecke adc und bdc benutzt werden.

Statt der erwähnten Kegelschnittlinien wählt man, wie früher schon erwähnt, um in leichter Weise eine normale Fugenstellung zu erhalten, auch für einhöftige Gewölbe eine Korbbojenlinie als Erzeugende, die dann aus zwei oder mehreren Kreisbogen zusammengesetzt ist.

In Fig. 286 u. 287 sind nach einer und derselben Grundlage Korbbojen aus 2 Mittelpunkten beschrieben, welche in den meisten Fällen in ihrer Construction möglich sind.

Die Kämpferpunkte a und b mit ihren zugehörigen lothrechten Tangenten, so wie eine beliebige Gerade cd , welche Tangente des Korbbojens sein soll, sind gegeben.

Nimmt man $ac = ce$ und errichtet in e das Loth em , so schneidet dasselbe die durch a geführte Wagrechte im Punkte m , welcher offenbar Mittelpunkt eines Kreises ist, für welchen ac und cd Tangenten sind und dessen Halbmesser $ma = r$ eine nun bekannte Länge erhalten hat. Der Halbmesser $bn = x$ des in b beginnenden Kreisbogens, welcher in diesem Punkte eine lothrecht gerichtete Tangente haben soll, so wie der Mittelpunkt n desselben und sein Vereinigungspunkt o mit dem ersten Kreisbogen, wofelbst für beide Kreisbogen eine gemeinschaftliche Tangente auftreten muß, sind unbekannt. Um zunächst die Größe des Halbmessers x zu finden, beschreibe man um m mit dem Halbmesser ma einen Kreisbogen K , welcher die verlängerte Gerade am im Punkte g schneidet, ziehe die Linie mb und hierzu in b das

Fig. 286.

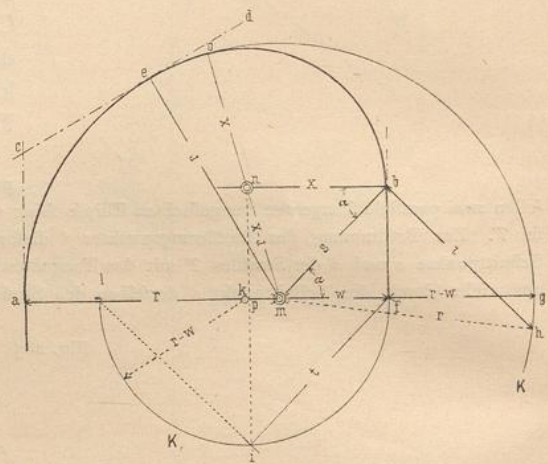
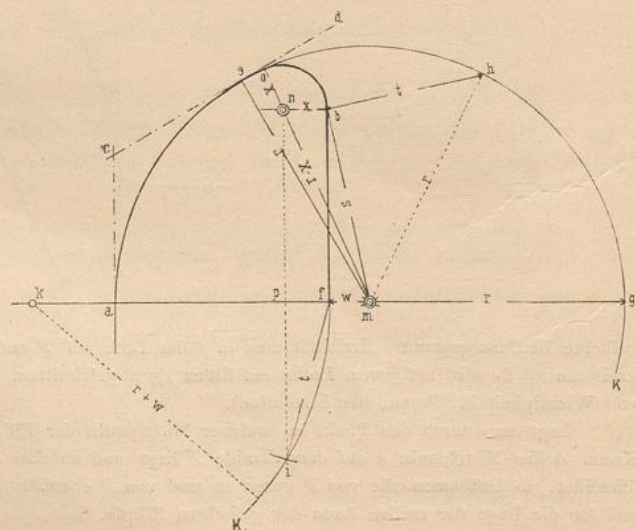


Fig. 287.



Loth bh , dessen Endpunkt h dem Kreise K angehört. Nimmt man alsdann $fk = fg$ als Halbmesser eines um k beschriebenen Kreises K_1 , trägt $fi = bh$ von f als Sehne desselben ein und fällt man von i das Loth ip auf af , so ist fp gleich dem gefuchten Halbmesser x .

Wird nunmehr in b rechtwinklig zur lothrechten Tangente bf die Strecke $bn = x$ angetragen, so ist n der Mittelpunkt des vom Kämpferpunkte b ausgehenden Kreisbogens. Zieht man endlich den gehörig verlängerten Strahl mn , so trifft derselbe den ersten vom Kämpferpunkte a ausgehenden Kreis K im Punkte o , welcher Vereinigungspunkt für die beiden aus m und n beschriebenen, den gefuchten Korb-bogen bildenden Kreisbogen ao und ob wird.

Die gegebene Construction ist durch folgende, den Bezeichnungen in Fig. 286 u. 287 entsprechende Beziehungen begründet. In Fig. 286 liegt der Mittelpunkt m innerhalb der Spannweite af des Gewölbes. Im schiefwinkligen Dreiecke mbn ist

$$(r - x)^2 = s^2 + x^2 - 2sx \cdot \cos \alpha,$$

oder, da $\cos \alpha = \frac{w}{s}$, auch

$$(r - x)^2 = s^2 + x^2 - 2wx,$$

d. h.

$$2(r - w)x = r^2 - s^2.$$

Da ferner $r^2 - s^2 = t^2$, so ergibt sich

$$2(r - w)x = t^2$$

oder

$$\frac{x}{t} = \frac{t}{2(r - w)}, \dots \dots \dots 133.$$

wonach t als mittlere Proportionale zwischen x und $2(r - w)$ auftritt.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke fp_i und fil sind einander ähnlich, und es ist

$$\frac{fp}{fi} = \frac{fi}{fl},$$

d. h. entsprechend der Gleichung 133

$$\frac{x}{t} = \frac{t}{2(r - w)}.$$

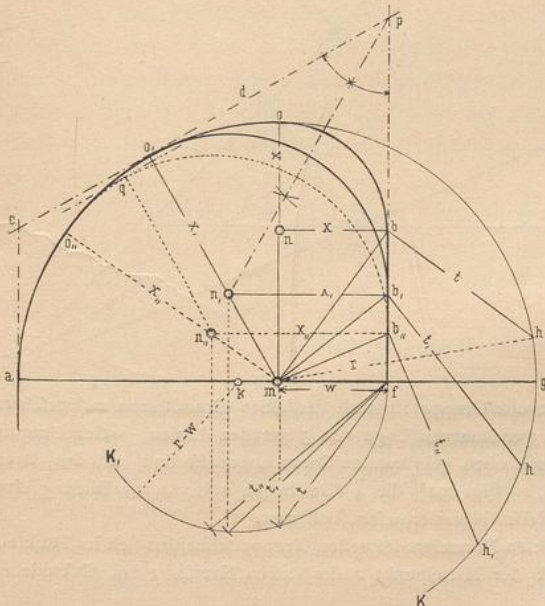
In Fig. 287 liegt der Mittelpunkt m des Kreises K ausserhalb der Spannweite af ; mithin wird die Strecke w negativ, und man erhält unter Einführung von $-w$ statt w in Gleichung 133 für diesen Fall

$$\frac{x}{t} = \frac{t}{2(r + w)}, \dots \dots \dots 134.$$

wonach der um k zu beschreibende Kreis K_1 einen Halbmesser $fk = r + w$ zu erhalten hat, während die übrigen Anordnungen sich nicht ändern.

In Fig. 288 sind für verschiedene Hüfthöhen fb, fb_1 u. f. f. nach dem angegebenen Verfahren die zugehörigen Korb-bogen aus 2 Mittelpunkten gezeichnet. Hierbei mag bemerkt werden, dass eine Grenzlage für den Kämpferpunkt b in einer Hüfthöhe fb_1 entsteht, sobald der Mittelpunkt n_1 des von b_1 ausgehenden Kreisbogens der Schnittpunkt der Halbierungslinie des Winkels cpf , welchen die beiden Tangenten cd und fb bilden, mit der Senkrechten mo_1 auf cd wird. Ist die Hüfthöhe kleiner als fb_1 , z. B. gleich fb_{11} , so tritt eine parallele Verschiebung der ursprünglichen Tangente cd nach q

Fig. 288.



ein, und der Vereinigungspunkt o'' , der beiden Korbboogenkreise liegt unterhalb von g .

Bei Korbboogen für einhüftige Gewölbe, mit mehr als 2 Mittelpunkten, z. B. aus 4 derselben, beschriebenen, läßt sich recht oft die in Fig. 289, 290 u. 291 angegebene Construction verwerthen.

Fig. 289.

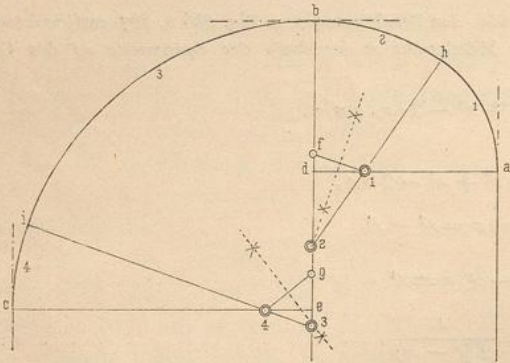
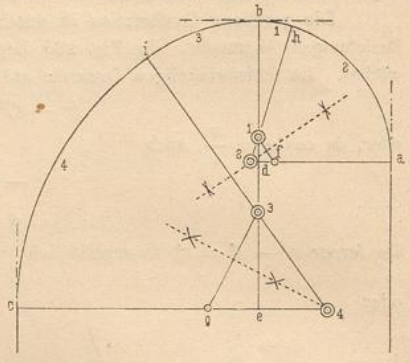


Fig. 290.

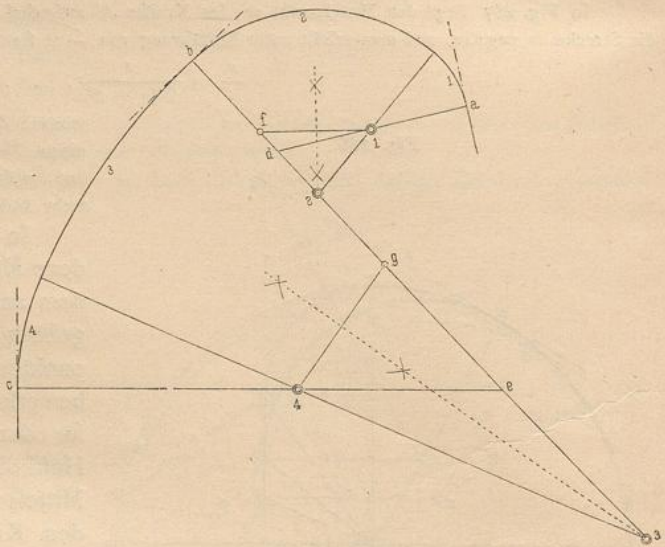


Gegeben sind 3 als Tangenten geltende gerade Linien mit den Berührungspunkten a, b und c . Man ziehe in diesen Punkten senkrechte Strahlen zu den Tangenten, bis dieselben, gehörig erweitert und der Reihe nach zu Paaren genommen, in d und e sich schneiden.

Hierdurch entstehen zwei Gruppen von Strecken, nämlich Gruppe aa und bd , so wie Gruppe be und ce . Bei der ersten Gruppe wähle man auf der größeren Strecke derselben einen festen Mittelpunkt 1 für den ersten Kreisbogen, dessen Anfangspunkt der dieser Strecke zugehörige Berührungspunkt ist.

Die Wahl dieses Mittelpunktes ist nur in der Weise beschränkt, daß der Halbmesser des ersten Kreises stets kleiner genommen werden soll, als die kürzere Strecke der in Betracht gezogenen Gruppe. Die Länge des so fest gestellten ersten Halbmessers wird vom Berührungspunkte auf der kürzeren Strecke bis f abgetragen, auf der Mitte der Verbindungslinie $1f$ das Loth errichtet, welches die erweiterte kürzere Strecke im Punkte z schneidet, welcher als Mittelpunkt des zweiten Kreisbogens auftritt. Eine durch die Mittelpunkte 1 und z gelegte gerade Linie bildet den Scheidestrahle der zu vereinigenden beiden Kreisbogen der ersten Gruppe. Für die zweite Gruppe ist nach denselben Grundfätzen zu verfahren.

Fig. 291.



So sind auch bei der sehr willkürlich genommenen Lage von 3 geraden Linien, welche nur im Allgemeinen als Tangenten dem Laufe einer nach oben gekrümmten Curve angepaßt sind, mit den darauf beliebig fest gelegten Berührungspunkten a, b, c (Fig. 291) die 4 Kreisbogen 1 bis 4 zur Bildung eines einhüftigen Korbboogens in der angegebenen Weise folgendermaßen bestimmt.

Die zu den Tangenten in a und b geführten Normalen der ersten Gruppe schneiden sich im Punkte a . Die Strecke ad ist größer als bd ; mithin ist der Mittelpunkt 1 des ersten Kreises 1 im Abstände $a1$ kleiner als bd gewählt, auf ad angenommen.

Hierauf ist $bf = ax$ abgetragen, in der Mitte der Geraden fI das Loth errichtet, welches erweitert den verlängerten Strahl bd in z schneidet. z ist Mittelpunkt des Kreises z . Die durch z und I geführte Gerade scheidet beide Kreise.

Die in b und c geführten Normalen der zweiten Gruppe treffen sich im Punkte e . Da ce größer ist als be , so ist der Mittelpunkt 4 auf der größeren Strecke ce angenommen und dabei $c4$ kleiner als be gewählt. Nunmehr ist $bg = c4$ auf be abgetragen, wiederum in der Mitte der Verbindungslinie $g4$ das Loth errichtet, welches verlängert die entsprechend fortgeführte Normale be im Punkte 3 , d. i. im Mittelpunkte des Kreises 3 trifft. Der Scheidestrahle der Kreise 3 und 4 ist die durch die Punkte 3 und 4 geführte Gerade.

b) Stärke der Tonnengewölbe und ihrer Widerlager.

Beim Anfertigen des Entwurfes eines Tonnengewölbes, welches als Decke für einen gegebenen Raum ausgeführt werden soll, tritt die Frage in den Vordergrund, welche Stärke dem Gewölbe und seinen Widerlagern gegeben werden muß, damit diese Baukörper eine sichere und dauernde Standfähigkeit besitzen. Bei der Bestimmung dieser Stärken ist nicht außer Acht zu lassen, daß der Materialaufwand für die Gewölb- und Widerlagsmassen ohne Schädigung der Stabilität der ganzen Wölbanlage ein möglichst kleiner wird. Aus diesem Grunde wird zunächst die geringste Weite des zu überdeckenden Raumes als Spannweite für das Gewölbe angenommen, während die längeren Begrenzungen desselben den Widerlagern zugewiesen werden. Sodann ist die größte Belastung fest zu setzen, welche außer dem Eigengewicht der Construction im ungünstigsten Falle auf das Gewölbe kommen soll, und endlich ist die Beschaffenheit des Materials in Hinsicht auf sein Gewicht und namentlich auf seine Festigkeit gegen Zerdrücken sorgfältig in Betracht zu ziehen.

Wenngleich eine große Zahl von empirischen Regeln für die Bestimmung der Stärken der Tonnengewölbe und ihrer Widerlager aufgestellt worden ist, so haben alle diese Regeln doch nur innerhalb gewisser Grenzen eine Berechtigung für ihre Anwendung; außerhalb dieser Grenzen können sie sogar zu einem Irrthum Veranlassung geben.

Für das Festlegen der Form der Gewölblinie, für die Bestimmung des Fugenschnittes, der Dicke des Gewölbkörpers und der Stärke des Widerlagers sind in jedem besonderen Falle die Wirkungen der im Gewölb- und Widerlagskörper thätigen Kräfte, so weit und so scharf als solches möglich, zu ergründen, um hierdurch die Ueberzeugung von der Festigkeit und Sicherheit des Baukörpers in allen seinen Theilen zu gewinnen.

Diese Aufgabe der statischen Untersuchung der Gewölbe fällt der »Gewölbtheorie« anheim. Die Bekanntschaft mit derselben muß hier vorausgesetzt und in dieser Beziehung auf Theil I, Band 1, zweite Hälfte (Abth. II, Abchn. 4¹⁶⁰) dieses »Handbuches« verwiesen werden.

Wenngleich in den Abhandlungen über »Gewölbtheorie« wesentlich die im Ingenieurbauwesen vorkommenden Gewölbe in Betracht gezogen werden, so ist dennoch zu beachten, daß diese Theorie auch für die Gewölbe im Hochbau von großem Werthe ist und in ihren Ergebnissen immer mehr und mehr Verwendung finden sollte. Auf einige wichtige dieser Ergebnisse möge im Folgenden hingewiesen werden¹⁶¹).

¹⁶⁰) 2. Aufl.: Abth. II, Abchn. 5.

¹⁶¹) Siehe auch: SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.
RITTER, A. Lehrbuch der Ingenieurmechanik. Hannover 1876.

136.
Stärke
unbelasteter
halb-
kreisförmiger
Tonnengewölbe.