Dächer im allgemeinen, Dachformen

Schmitt, Eduard

Stuttgart, 1901

1) Statische Verhältnisse und theoretische Grundlagen für die Konstruktion.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78841

ist nach vorstehendem leicht zu finden; aus derselben ergeben sich diejenigen in *I II*. Zu der Spannung in *I II*, welche hierdurch erzeugt wird, kommt noch diejenige hinzu, welche in *C' I* herrscht.

Die in Fig. 358, 359 u. 360 (S. 140) vorgeführten Bogendächer, bei denen der Bogen als ein Gitterwerk gebildet ist, können auch mit Durchzügen hergestellt werden.

28. Kapitel.

Hölzerne Turmdächer, Zelt- und Kuppeldächer.

a) Hölzerne Turmdächer.

116. Einleitung.

Turmdächer sind steile Zeltdächer über quadratischer oder achteckiger, auch wohl kreisförmiger, selten über einer anders geformten Grundfläche. Dieselben werden hauptsächlich durch den Winddruck gefährdet; Schnee bleibt wegen der Steilheit nicht liegen; das Eigengewicht erzeugt keine bedeutenden Beanspruchungen.

Eine gute Turmdach-Konstruktion mufs folgenden Anforderungen Genüge leisten: sie mufs standfest und fähig sein, auch bei ungünstigster Belastung die auf sie einwirkenden Kräfte sicher und, ohne merkbare Formänderung zu erleiden, in das unterstützende Mauerwerk zu leiten; sie mufs der Zerstörung durch Feuchtigkeit und Faulen möglichst wenig Angriffspunkte bieten; sie mufs leichten und sicheren Aufbau gestatten, bequemes Ausbessern und Auswechseln etwa schadhaft gewordener Hölzer ermöglichen; sie darf nicht zu viel Holz erfordern, um nicht zu teuer zu werden.

1) Statische Verhältnisse und theoretische Grundlagen für die Konstruktion.

117. Kräfte.

Die Turmdächer setzen sich stets auf hohe Mauern; für diese sind aber wagrechte Kräfte besonders gefährlich; deshalb ordne man die Konstruktion stets so an, dafs die wagrechten Kräfte möglichst gering werden. Demgemäfs sind Sprengwerkkonstruktionen, welche stets auch wagrechte Kräfte auf die Mauern übertragen, hier ausgeschlossen. Die schiefen Windkräfte haben allerdings stets wagrechte auf die Konstruktion wirkende Seitenkräfte, die man nicht fortschaffen kann. Man mufs aber suchen, diese gefährlichen Seitenkräfte und ihr Umsturzmoment so klein wie möglich zu machen; durch eine zweckmäfsige Form des Turmdaches ist eine solche Verkleinerung wohl möglich, wie die Überlegung unter α zeigt.

118. Windbelastungen.

α) Windbelastungen. Nach den Untersuchungen in Teil I, Band I, zweite Hälfte (2. Aufl., S. 23 u. 24; 3. Aufl., S. 25) dieses »Handbuches« ist der Winddruck gegen ein achtseitiges Prisma kleiner als derjenige gegen ein vierseitiges Prisma; das Gleiche gilt für die Pyramide. Nennt man die Höhe des Turmdaches h, den Winddruck auf das Flächenmeter senkrecht getroffener Fläche p, die Seite des Quadrates, bezw. des Grundquadrats der Grundfläche B, nimmt man den Winddruck als wagrecht wirkend an und berechnet (mit geringem Fehler) so, als ob die Seitenflächen lotrecht ständen, so erhält man als die auf Umsturz des ganzen Turmdaches wirkende Kraft W:

bei quadratischer Grundfläche $W = p\frac{Bh}{2} = 0{,}5\,pBh$;

bei regelmäſsiger Achteck-Grundfläche (Fig. 370) $W = 0{,}414\,pBh$;

bei kreisförmiger Grundfläche (Kegeldach) $W = 0{,}39\,pBh$;

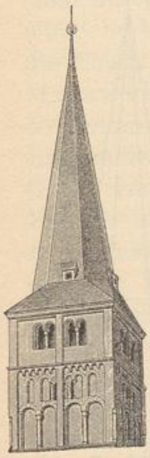
d. h. die auf Umsturz wirkende Kraft ist bei einem Turmdach über regelmäſsigem Achteck um etwa 17 und bei einem Kreiskegeldach um etwa 22 Vomhundert geringer als bei einem Dach über quadratischer Grundfläche (Höhe und untere Breite als gleich angenommen).

Bei dreieckiger Seitenfläche des Turmdaches liegt die Mittelkraft der Windkräfte in ein Drittel der Höhe über der Grundfläche; das Umsturzmoment ist dann

$$M_{Umsturz} = W\frac{h}{3}.$$

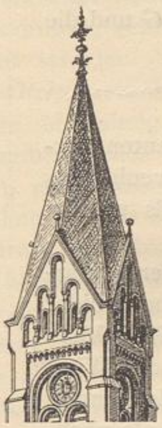
Eine Verkleinerung des Umsturzmoments kann sowohl durch Verringerung von W, wie auch von h erreicht werden; die letztere Verkleinerung, d. h. eine tiefere Lage von W wird durch Verbreitern der Grundfläche und Anwendung verschiedener Dachneigungen in den verschiedenen Teilen des Turmdaches erzielt. Eine solche in Fig. 368[172]) dargestellte Anordnung hat neben dem Vorteil der tiefen Lage von W noch den weiteren statischen Vorzug, daſs die den unteren Teil belastenden Winddrücke gröſsere Winkel mit der Wagrechten einschlieſsen, als die auf den steileren Teil wirkenden; sie sind also kleiner und haben eine günstigere Richtung.

Fig. 368.



Von der Kirche zu Schwarzrheindorf[172]).

Fig. 369.



Von der reformierten Kirche zu Insterburg[173]).

Statisch günstig ist auch die vielfach ausgeführte, architektonisch sehr wirksame Anordnung von vier Giebeln (Fig. 369[173]); durch dieselben wird ein Teil des Daches der Einwirkung des Windes entzogen.

Endlich ist auch eine Form des Turmdaches zweckmäſsig, bei welcher dasselbe eine über Ecke gestellte vierseitige Pyramide bildet, deren Kanten nach den Spitzen der vier Giebel laufen; diese sog. Rhombenhaube (Rautenhaube) ist günstiger als die einfache Pyramide, deren Kanten nach den Ecken des Grundquadrats laufen. Die gröſste auf Umkanten wirkende Windkraft in der Diagonalebene ist allerdings genau so groſs, wie die in der Mittelebene des Turmes ungünstigstenfalls wirkende; beide sind aber annähernd 30 Vomhundert geringer, als wenn das Dach als vierseitige Pyramide mit nach den Ecken des Quadrats laufenden Kanten hergestellt wäre.

Den Winddruck auf das Flächenmeter lotrechter Turmquerschnittsfläche setze man $p = 200^{kg}$ für 1^{qm}; an besonders dem Wind ausgesetzten Stellen rechne man mit $p = 250^{kg}$ für 1^{qm}. Besonders vorsichtig muſs man bei Berechnung des Winddruckes auf die bekrönenden Teile (Kreuz, Windfahne, Knauf, Blitzableiter etc.) sein; die betreffenden Flächen sind verhältnismäſsig klein und bei ihrer bedeutenden Höhenlage besonders groſsen Stoſswinden ausgesetzt.

172) Faks.-Repr. nach: Dohme, R. Geschichte der deutschen Baukunst. Berlin 1890. S. 68.

173) Faks.-Repr. nach: Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 451.

Man rechne als getroffene Fläche bei runden Stangen das Doppelte der vom Winde getroffenen Abwickelungsfläche, bei der Bekrönung die geradlinig umschriebene Figur der getroffenen Fläche, also beim Kreuz das Viereck, welches durch die vier Kreuzenden bestimmt ist. Für diese Teile setze man $p = 300$ kg für 1 qm.

119. Standsicherheit des Turmhelms.

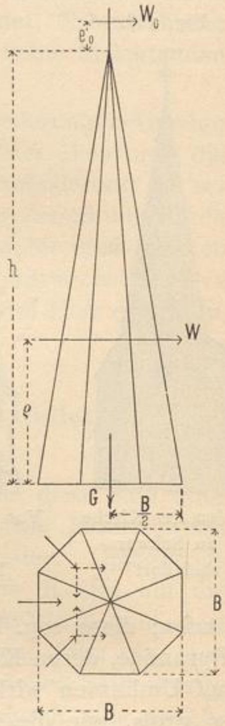
β) Standsicherheit des Turmhelms. Für die Standsicherheit mufs zunächst verlangt werden, dafs nicht das Turmdach als Ganzes seitlich verschoben oder umgekantet werden könne. Der ersteren Bewegung wirkt der Reibungswiderstand an den Auflagern entgegen, der Drehung um eine Kante das Stabilitätsmoment. Nennt man die ganze ungünstigstenfalls auf das Turmdach wirkende Windkraft W, die Höhe des Angriffspunktes dieser Kraft über der Grundfläche ρ, den auf das Turmkreuz wirkenden Winddruck W_0 und seine Höhe über der Turmspitze e_0, so ist das Umsturzmoment (Fig. 370)

$$M_{Umsturz} = W_\varrho + W_0\,(h + e_0);$$

ρ ist meistens nahezu gleich $\frac{h}{3}$. Das Stabilitätsmoment ist, wenn man das Gewicht des Turmdaches mit G und die Breite der Grundfläche mit B bezeichnet,

$$M_{Stab} = \frac{GB}{2}.$$

Fig. 370.



Damit stets ausreichende Sicherheit gegen Umkanten vorhanden sei, mache man das Stabilitätsmoment wenigstens zweimal so grofs, als das Umsturzmoment jemals werden kann.

Der ungünstigste Fall tritt unmittelbar vor der Fertigstellung des Turmes ein, wenn die Dachdeckung noch nicht aufgebracht, das Turmgewicht folglich verhältnismäfsig klein ist. Falls auch die Verschalung noch fehlt, kann der Wind im Zimmerwerk, in den Balkenlagen und ihren Abdeckungen unter Umständen gröfsere Angriffsflächen finden, als nachher; jedenfalls berechne man den Turm wenigstens so, dafs er ohne Dachdeckung, aber mit Lattung oder Schalung ausreichende Sicherheit gegen Umsturz und Verschieben bietet.

Soll ein frei auf das Turmmauerwerk gesetztes Turmdach nicht seitlich verschoben werden, so mufs die gröfste wagrechte Windkraft kleiner sein, als der Reibungswiderstand an den Auflagern. Der Reibungskoeffizient kann zu 0,5 bis 0,6 angenommen werden; demnach mufs

$$W + W_0 < 0{,}5\,G$$

sein.

Wenn das Eigengewicht des Turmes die verlangte Standsicherheit nicht liefert, so bleibt nichts übrig, als das Turmdach mit dem Turmmauerwerk zu verankern.

120. Verankerung des Turmhelms.

Die Frage, ob eine Verankerung notwendig oder auch nur zulässig sei, wird verschieden beantwortet. Früher galt es als ausgemacht, dafs man eine Verankerung des Turmhelms im Mauerwerk vermeiden müsse, weil durch eine solche das Mauerwerk gezwungen würde, an den Bewegungen des Turmdaches teilzunehmen, was dem Mauerwerk über kurz oder lang schädlich werden müsse. Auch verwies man auf die aus alter Zeit stammenden, nicht verankerten Türme, welche sich gut gehalten haben. *Moller* schreibt bestimmt vor[174]), dafs das Zimmerwerk der Turmspitze unmittelbar auf den oberen Teil der Mauer gesetzt werden solle, so dafs die Holzkonstruktion ganz für sich bestehe und das Mauerwerk keine weitere Verbindung mit ersterer habe, als dafs es derselben zur Unterlage diene. Das Eigengewicht der Dachkonstruktion mufs alsdann genügen, um das Kanten zu verhüten.

Andererseits mufs aber doch verlangt werden, dafs das Bauwerk unter allen Umständen standfest sei. Genügt hierzu das Eigengewicht nicht, so verankere man oder vermindere die Höhe so weit, bis das Gewicht für die Standfestigkeit ausreicht. Letzteres ist vielfach nicht möglich; folglich bleibt nur die Verankerung übrig. Es fragt sich nun, ob denn wirklich die gegen die Verankerung in das Feld geführten Bedenken so schwerwiegend sind. Die gefürchtete Bewegung der Füfse des Turmhelms kann dann nicht eintreten, wenn man dieselben fest und genügend tief mit dem Mauerwerk verankert; es kann sich stets nur um Verringerung des Auflagerdruckes handeln, der auch negativ werden kann und dann durch das Gewicht des an die Anker gehängten Mauerwerkes aufgehoben wird. So lange Gleichgewicht vorhanden ist, werden keine oder höchstens durch die Elastizität bedingte, sehr geringfügige Bewegungen eintreten, welche dem Mauerwerk nicht schaden. Aber auch die Erfahrung spricht nicht gegen die Verankerung. *Otzen* verankert seine hölzernen Turmhelme ohne nachteilige Ergebnisse; nach Mitteilung von *Mohrmann*[175]) hat auch der Altmeister der Gotik, *Haase*, unbedenklich zur Verankerung hölzerner Turmdächer gegriffen. Endlich ist auch nicht einzusehen, warum es zulässig sein soll, eiserne Türme zu verankern, ohne für das Mauerwerk schlimme Folgen zu befürchten, während dies für Holztürme unzulässig sei. Auch kann man auf die hohen eisernen Viaduktpfeiler hinweisen, welche stets verankert werden, ohne dafs man Befürchtungen für das Mauerwerk des Unterbaues hegt. Wenn aber auf die alten Türme hingewiesen wird, welche unverankert Stand gehalten haben, so ist zu bemerken, dafs diese ein nicht unbedeutend gröfseres Eigengewicht hatten; sie enthielten teilweise mehr Holz und vor allem schwereres Holz, da sie meist aus Eichenholz hergestellt wurden, während heute das leichtere Tannenholz die Regel bildet.

Nach dem Vorstehenden kann der Verfasser sich nur für die Verankerung der hölzernen Turmhelme aussprechen; dieselbe mufs im stande sein, auch bei ungünstigsten Kräftewirkungen die Standsicherheit zu erhalten.

Bereits oben ist bemerkt, dafs man den Winddruck zu 200 ^{kg} (bezw. 250 ^{kg}) für 1 ^{qm} senkrecht getroffenen Fläche setzen soll, dafs ferner der Zustand des noch nicht gedeckten, aber bereits verschalten oder verlatteten Turmes der Rechnung zu Grunde zu legen ist. Man bestimme nun die Verankerung so, dafs das Stabilitätsmoment, einschliefslich des Moments des an den Ankern hängenden Mauergewichtes, wenigstens doppelt so grofs ist als das Umsturzmoment[176]).

174) In: MOLLER, G. Beiträge zu der Lehre von den Constructionen: Ueber die Construction hölzerner Thurmspitzen. Darmstadt und Leipzig 1832–44.

175) In: Deutsche Bauz. 1895, S. 394.

176) Siehe auch: LODEMANN. Verankerung der Thurmhelme mit dem Mauerwerk. Centralbl. d. Bauverw. 1895, S. 481.
SEIBERTS. Der Absturz des Thurmhelms an der St. Matthiaskirche zu Berlin. Deutsche Bauz. 1895, S. 382.
RINCKLAKE, MOHRMANN. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 393.
MARSCHALL, CORNEHL. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 477.
SEIBERTS. Desgl. Deutsche Bauz. 1895, S. 415.

Von grofser Bedeutung für die Standsicherheit ist das Verhältnis der Pyramidenhöhe h zur Breite B der Grundfläche (die Bezeichnungen entsprechen denjenigen in Fig. 370, S. 150). Dasselbe ist in erster Linie von architektonischen Erwägungen abhängig; doch dürfte es sich empfehlen, auch die statischen Verhältnisse in Betracht zu ziehen und allzugrofse Höhen zu vermeiden. Die Ausführungen zeigen die Verhältnisse $\frac{h}{B} = 3$ bis $4^1/_2$, ausnahmsweise auch wohl bis $\frac{h}{B} = 5$.

121. Turmfachwerk.

γ) Turmfachwerk; allgemeines. Es genügt nicht, dafs die Turmpyramide, als Ganzes betrachtet, stabil sei; auch die einzelnen Teile derselben müssen ein unverrückbares Fachwerk bilden, welches die an beliebigen Stellen aufgenommenen belastenden Kräfte sicher und, ohne merkliche Formänderungen zu erleiden, in den Unterbau befördert; sie mufs ein geometrisch bestimmtes, wo möglich auch ein statisch bestimmtes Fachwerk sein. Um Klarheit über den Aufbau zu bekommen, sind einige allgemeine Untersuchungen über das räumliche Fachwerk hier vorzunehmen, welche sowohl für die Holztürme, wie für die Eisentürme Geltung haben.

Die Voraussetzungen, welche hier gemacht werden, sind allerdings bei den Holztürmen nicht ganz erfüllt; insbesondere ist die Annahme der gelenkigen Knotenverbindung der Fachwerkstäbe nicht genau. Dennoch sind die nachfolgenden Untersuchungen auch für die Holztürme nicht wertlos. Wenn sich ergiebt, dafs (für unsere Voraussetzungen) das Turmfachwerk bei der einen Anordnung der Stäbe labil, bei einer etwas geänderten Stabanordnung aber stabil sein würde, so wird man zweckmäfsig die zweite Anordnung vorziehen. Denn es ist stets mifslich, sich auf die unbekannten Hilfskräfte zu verlassen, welche auftreten, weil die Voraussetzungen nicht genau erfüllt sind, zumal wenn, wie hier, die rechnerische Ermittelung dieser Hilfskräfte eine äufserst umständliche und schwierige Arbeit ist. Da nun die folgenden Untersuchungen wegen der eisernen Türme u. s. w. ohnehin vorgenommen werden müssen und auf die üblichen Turmfachwerke klares Licht werfen, so dürfte für dieselben hier die geeignete Stelle sein.

Die Turmhelme sind Raumfachwerke. Die einfachste Stützung eines Raumfachwerkes ist diejenige vermittels dreier Fufspunkte. Die Zahl der in den Auflagerdrücken enthaltenen Unbekannten darf nicht gröfser als 6 sein, wenn die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper zu ihrer Ermittelung ausreichen sollen. Man mufs nun, um sowohl eine wagrechte Verschiebung der ganzen Konstruktion, als auch eine Drehung derselben um eine lotrechte Achse zu verhüten, ein Auflager fest, ein zweites in einer geraden Linie verschiebbar machen, während das dritte in der Stützungsebene frei beweglich sein kann. Der Auflagerdruck des festen Auflagers kann eine ganz beliebige Richtung annehmen, enthält also drei Unbekannte, als welche man zweckmäfsig die drei Seitenkräfte einführt, welche sich bei rechtwinkeliger Zerlegung des Auflagerdruckes nach drei Achsen ergeben. Der Auflagerdruck des in einer Geraden verschiebbaren Lagers mufs senkrecht zu der Geraden — der sog. Auflagerbahn — gerichtet sein, weil die in die Richtung dieser Linie fallende Seitenkraft, der Beweglichkeit wegen, stets Null ist; dieser Auflagerdruck enthält also nur zwei Unbekannte, nämlich die beiden Seitenkräfte in der zur Auflagerbahn senkrecht gerichteten Ebene. Im Auflagerdruck des dritten, in einer Ebene beweglichen Auflagers ist nur eine Unbekannte, die Gröfse der Kraft, enthalten; denn die Richtung ist diesem

Auflagerdruck vorgeschrieben: er mufs wegen der Beweglichkeit des Auflagers senkrecht zur Auflagerebene stehen.

Allgemein bedeutet nach vorstehendem beim Raumfachwerk jedes feste Auflager drei Unbekannte (entspricht drei Auflagerbedingungen), jedes in einer Linie bewegliche Auflager zwei Unbekannte (entspricht zwei Auflagerbedingungen) und jedes in einer Ebene bewegliche Auflager eine Unbekannte (entspricht einer Auflagerbedingung). Wir werden weiterhin die drei Arten der Auflager kurz als Punktlager, Linienlager, Ebenenlager bezeichnen.

Im oben angenommenen Falle dreier Auflager, von denen je eines ein Punkt-, ein Linien- und ein Ebenenlager ist, enthalten also die Auflagerkräfte $3+2+1=6$ Unbekannte, für deren Ermittelung die Gleichgewichtslehre bekanntlich 6 Gleichungen bietet. Die Auflagerkräfte werden sich demnach nach den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper bestimmen.

Allein auch die Spannungen der einzelnen Stäbe des Raumfachwerkes müssen für beliebige mögliche Belastungen ermittelt werden können. Am einfachsten kann dies geschehen, wenn das Fachwerk statisch bestimmt ist, d. h. wenn alle Stabspannungen aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können. Damit dies möglich sei, mufs die Zahl der Stäbe zu derjenigen der Knotenpunkte in einem bestimmten Verhältnisse stehen.

Wir bezeichnen mit k die Anzahl der Knotenpunkte, s die Anzahl der Stäbe, p die Anzahl der festen Auflager (Punktlager), l die Anzahl der in Linien geführten Lager (Linienlager) und mit e die Anzahl der in Ebenen geführten Lager (Ebenenlager); alsdann ist die Zahl aller Unbekannten

$$s+3p+2l+e.$$

An jedem Knotenpunkte ergeben sich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen drei Gleichungen; also bei k Knotenpunkten erhält man $3k$ Gleichungen. Die Zahl der Unbekannten mufs für statische Bestimmtheit gleich der Zahl der Gleichungen sein; mithin ist die Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$s+3p+2l+e=3k,$$

und wenn man abkürzungsweise die Zahl der Auflagerunbekannten

$$3p+2l+e=n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7.$$

setzt, so wird $s+n=3k$ und

$$s=3k-n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8.$$

Bei der obigen Annahme dreier Auflager, eines Punkt-, eines Linien- und eines Ebenenlagers, war $p=1$, $l=1$ und $e=1$, also $n=3+2+1=6$; mithin mufs für diesen Fall sein

$$s=3k-6 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

Das einfachste räumliche Fachwerk ist das Tetraëder, welches 4 Knotenpunkte und 6 Stäbe hat; bei demselben ist thatsächlich $s=3k-6=3\cdot 4-6=6$; dasselbe ist also ein statisch bestimmtes Fachwerk. Ein Punkt im Raume wird aber geometrisch bestimmt, wenn er durch Linien (Stäbe) mit 3 festen Punkten verbunden wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen; alsdann findet auch eine zweifellose Zerlegung jeder auf diesen Punkt wirkenden Kraft auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen statt. Man kann also durch allmähliches Anfügen von je einem Knotenpunkte und 3 Stäben an den Grundkörper des Tetraëders ein geometrisch und statisch bestimmtes Raumfachwerk erhalten. Dies folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 9. Nennt man die Zahl der zu einem statisch bestimmten Fachwerk hinzukommenden Knotenpunkte allgemein x, diejenige der hinzukommenden Stäbe σ, so ist das entstehende Fachwerk statisch bestimmt, wenn stattfindet:

$$s + \sigma = 3\ (k + \varkappa) - 6.$$

Es war aber auch $s = 3k - 6$, woraus folgt, dafs für den Fall statischer Bestimmtheit

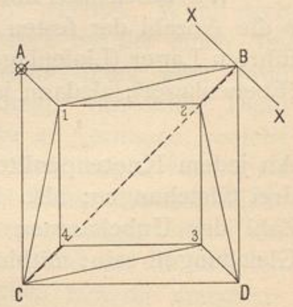
$$\sigma = 3\varkappa$$

sein mufs.

Soll also das Fachwerk auch nach dem Hinzufügen der neuen Knotenpunkte statisch bestimmt bleiben, so mufs stets die Zahl der hinzukommenden Stäbe 3 mal so grofs sein als die Zahl der hinzukommenden Knotenpunkte. Für $\varkappa = 1$ mufs $\sigma = 3$ sein.

Die Anordnung eines Turmes mit nur drei Fufspunkten ist nicht üblich; es sind aber auch Stützungen auf mehr als drei Füfsen als statisch bestimmte, räumliche Fachwerke möglich. Dies könnte auffallen, wenn man bedenkt, dafs nur dann die Auflagerdrücke eines Körpers mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, wenn die Zahl der Fufspunkte nicht gröfser als 3 ist. Bei einem Fachwerk aber kann man die Auflagerdrücke dennoch bestimmen, auch wenn die Zahl der in diesen enthaltenen Unbekannten gröfser als 6 ist; nur mufs man dafür Sorge tragen, dafs das Fachwerk eine gleiche Zahl Stäbe, also Unbekannte, weniger enthält, wie die Zahl der Unbekannten in den Auflagerdrücken gröfser ist als 6 (bezw. n). Selbstverständlich darf man nicht beliebige Stäbe entfernen und mufs in jedem Falle genau untersuchen, ob das entstehende Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist oder nicht. Ähnliche Anordnungen sind beim ebenen Fachwerk vorhanden, so bei den Bogenträgern mit 3 Gelenken, den Auslegerträgern etc. Man mufs also auch hier, wegen der hinzukommenden Auflagerunbekannten, neue Bedingungen durch die Konstruktion schaffen. Nachstehend sollen die beiden wichtigsten Fälle des vierseitigen und des achtseitigen Turmfachwerkes in dieser Hinsicht besprochen werden.

Fig. 371.



122. Vierseitige Turmpyramide. δ) Vierseitige Turmpyramide. Die vier Fufspunkte derselben seien A, B, C, D (Fig. 371); einer derselben, etwa A, sei fest, ein zweiter, B, sei in einer Linie, etwa XX, die beiden anderen in der Ebene $ABCD$ beweglich. Die Auflagerdrücke enthalten also $n = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$ Unbekannte. Geht man vom Dreieck ABC aus, wobei A mit 3, B mit 2 und C zunächst mit einer Auflagerbedingung eingeführt werden, so sind alle drei Punkte in der Ebene genau durch die Auflagerbedingungen und die Längen der Dreieckseiten bestimmt, wenn nicht etwa die Auflagerbahn XX des Punktes B senkrecht zur Linie AB gerichtet ist. Der Punkt 1 in einer über ABC liegenden Ebene wird nunmehr durch die drei Stäbe $A\,1$, $B\,1$ und $C\,1$ geometrisch bestimmt. Das erhaltene Tetraëder ist geometrisch und statisch bestimmt. Verbindet man nunmehr den vierten Fufspunkt D mit 2 Punkten, etwa mit B und C, in derselben Ebene, so wird auch D geometrisch festgelegt, da dieser Punkt in der Ebene ABC bleiben mufs; der dritte Stab, welcher eigentlich erforderlich wäre, um C festzulegen, wird durch die Auflagerbedingung bei D ersetzt. Daraus folgt, dafs, wie die Spannung dieses (nicht angeordneten) Stabes stets bekannt wäre, wenn D kein Auflagerpunkt wäre, so auch der Auflagerdruck bei D stets nach statischen

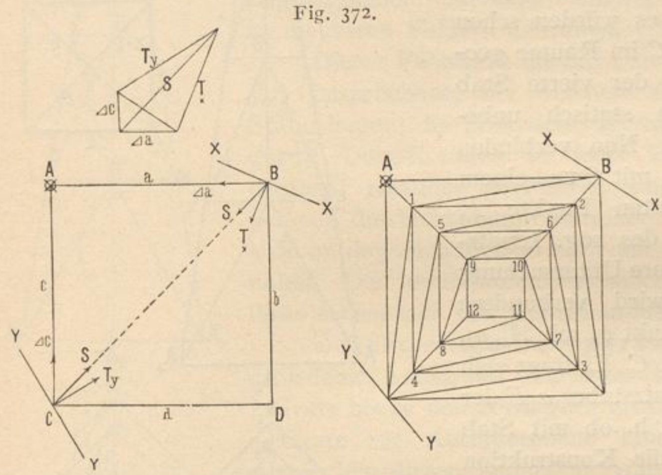
Gesetzen ermittelt werden kann. D ist als in der Ebene $ABCD$ beweglich zu konstruieren. (Man kann auch, wie dies mehrfach geschehen ist, für die Untersuchung den Auflagerdruck durch einen gedachten Stab ersetzen.) Für das Fachwerk mit 4 Stützpunkten nach Fig. 371 ist also die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 7$, die Zahl der Stäbe s und die Zahl der Knotenpunkte k; also mufs für den Fall statischer Bestimmtheit

$$s + 7 = 3k \text{ oder } s = 3k - 7$$

sein. Man kann nun Knotenpunkt *2* mit *1*, B, D, Punkt *3* mit *2*, D, C und Punkt *4* mit *3*, C, *1* verbinden und erhält so das in Fig. 371 gezeichnete Fachwerk, welches geometrisch und auch statisch bestimmt ist.

Bislang war angenommen, dafs ein Stab BC vorhanden sei; dieser Stab ist unbequem und für die Benutzung störend. Es fragt sich, ob, bezw. unter welchen Bedingungen dieser Stab fortgelassen werden kann. Stab BC war angeordnet, um Punkt C in der Auflagerebene geometrisch festzulegen. Man kann dies auch dadurch erreichen, dafs man für C, wie für B, eine Auflagerbahn, etwa YY (Fig. 372), vorschreibt; dieselbe kann beliebige Richtung haben; nur darf sie nicht senkrecht zu AC stehen, da sonst eine sehr kleine Bewegung des Punktes C, nämlich eine Drehung um A, möglich wäre. Wenn nun Punkt C ohne Stab BC festgelegt ist, so kann dieser fortfallen; das Fachwerk wird also durch Fortlassen des Stabes BC nicht labil.

Fig. 372.



Man kann sich dies auch dadurch klar machen, dafs man zunächst den Stab BC als vorhanden annimmt und untersucht, ob die Spannung desselben durch das wirklich vorhandene Fachwerk, d. h. nach Fortnahme von BC, geleistet werden kann. Ist die Spannung des Stabes BC gleich S_C, so zerlegt sich S_C in zwei Seitenkräfte, deren eine senkrecht zur Auflagerbahn YY, deren andere in die Linie AC fällt. In die Linie CD kann kein Teil der Kraft fallen, weil er in D (dort ist ein bewegliches Flächenlager) nicht aufgenommen werden kann. Ebenso wird die in B angreifende Kraft $S_B = S_C$ durch den Gegendruck der Auflagerbahn XX und die hinzukommende Spannung in BA geleistet. Die beiden Kräfte Δa in AB und Δc in CA werden dann im festen Punkte A in das Mauerwerk geleitet. Der Turm mit vier Fufspunkten kann also als statisch bestimmtes Fachwerk hergestellt werden, wenn ein Auflager fest, ein zweites Auflager in der Auflagerebene, die beiden weiteren Auflager in geraden Linien beweglich gemacht sind und an diese vier Auflagerpunkte weitere Punkte nach der allgemeinen Regel (je 1 Knotenpunkt und 3 Stäbe) angeschlossen werden. Grundbedingung für die Stabzahl ist hier, weil $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ ist,

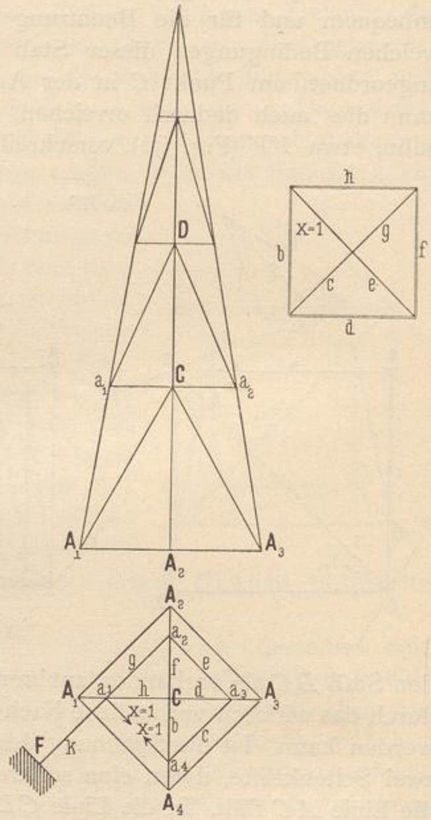
$$s = 3k - 8.$$

123. Vierseitige Turmpyramide mit Kaiserstiel.

Eine solche Anordnung zeigt Fig. 372, bei welcher die Spitze des Turmhelms nicht gezeichnet ist. Durch diese wird, weil hier ein Knotenpunkt mit 4 Stäben hinzukommt, das Fachwerk statisch unbestimmt; es bleibt aber geometrisch bestimmt.

Es liegt nahe, die vierseitige Turmpyramide dadurch zu versteifen, dafs man in die beiden lotrechten Diagonalebenen Dreieckverband legt. Diese Anordnung ist von den Alten vielfach ausgeführt und hat sich bewährt; aufser dieser Versteifung ist aber noch eine solche in den Seitenebenen anzubringen, worauf bereits *Moller* [177]) aufmerksam gemacht hat. Fig. 373 zeigt den Grundrifs und den Diagonalschnitt eines solchen Turmdaches; die Helmstange reicht bis zum Punkt C hinab; die Diagonalebenen sollen durch die Schrägstäbe $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$, $A_4 C$, $a_1 D$, $a_2 D$, $a_3 D$, $a_4 D$, u. s. w. versteift werden.

Fig. 373.



Um die Stabilität des Fachwerkes zu untersuchen, bauen wir von den vier festen Auflagern A_1, A_2, A_3, A_4 aus auf. Zunächst wird C mit allen vier Auflagern durch Stäbe verbunden; es würden schon drei Stäbe genügen, um C im Raume geometrisch fest zu legen; der vierte Stab macht die Konstruktion statisch unbestimmt, aber nicht labil. Nun verbinden wir a_1 durch Stäbe mit A_1, mit C und einem aufserhalb gelegenen festen Punkte F; wegen des Stabes $a_1 F$, des sog. Ersatzstabes k, ist noch eine weitere Untersuchung vorzunehmen. Ferner wird verbunden: Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, C. Es fragt sich nun, ob an Stelle des Ersatzstabes $a_1 F$ der Stab $a_1 a_4$ treten kann, d. h. ob mit Stab $a_1 a_4$, aber ohne Stab k die Konstruktion stabil ist. Zieht man den Stab $a_1 a_4$ ein, so möge bei beliebiger äufserer Belastung in demselben die Spannung X entstehen, welche bei a_4 und bei a_1 je in der Stabrichtung wirkt. Wäre Stab $a_1 a_4$ nicht vorhanden, so möge die bei irgend einer Belastung im Ersatzstab auftretende Spannung die Gröfse $\mathfrak{S}_{0k}$ haben; die aufserdem vorhandenen Kräfte X im Stabe $a_1 a_4$ erzeugen im Ersatzstab die Spannung $X S_k'$; demnach ist im ganzen im Stabe k die Spannung

$$S_k = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k'.$$

Soll die Konstruktion ohne Ersatzstab k stabil sein, so mufs für beliebige Belastung S_k gleich Null sein, X aber einen reellen Wert haben; d. h. es mufs

$$0 = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k' \text{ und } X = -\frac{\mathfrak{S}_{0k}}{S_k'}$$

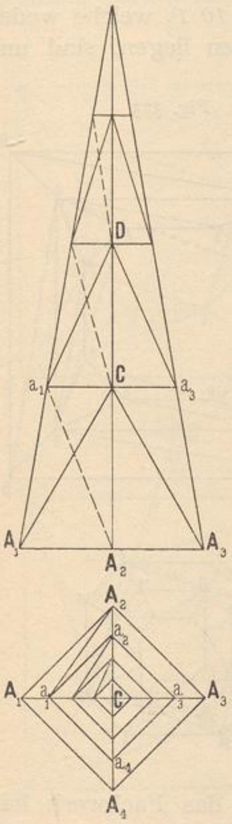
sein. Ergiebt sich $S_k' = 0$, so ist nur bei $X = \infty$ das Gleichgewicht möglich,

[177]) A. a. O., Heft 4.

d. h. das Gleichgewicht ist dann überhaupt nicht möglich. S_k' ist die Spannung, welche in Stab k durch $X = 1$ erzeugt wird. Man sieht leicht aus der graphischen Zerlegung in Fig. 373, dafs $S_k' = 0$, das Fachwerk also nicht brauchbar ist. Ist aber dieser Unterbau nicht stabil, so gilt das Gleiche vom weiteren Aufbau, zumal sich die Anordnung in den oberen Geschossen wiederholt[178]).

Zweifellos brauchbar wird aber die Konstruktion, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale $a_1 A_2$ (Fig. 373). Dann ergiebt sich der Aufbau wie folgt. Zunächst wird C wie oben im Raume festgelegt; nun wird verbunden: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C, Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_1. Stab $a_4 C$ wird gewöhnlich zugefügt; er ist überzählig, macht aber die Konstruktion nicht labil. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Die Helmstange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte C, D u. s. w. zu erleichtern. In der Ansicht (Fig. 374) sind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktiert. — Gewöhnlich wird man statt einer Diagonale Andreaskreuze oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, sondern in mehreren Feldern anordnen.

Fig. 374.



Dieses Fachwerk ist nicht so klar, wie das zuerst (Fig. 372) besprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktische Konstruktion ist aber sehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüber stehenden Gratsparren und nehmen die Helmstange zwischen sich; gegen diese setzen sich in den einander kreuzenden Mittelebenen die Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in diese setzen sich die Andreaskreuze.

ε) Achtseitige Turmpyramide. Bei dieser sind verschiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zur Auflagerebene hinabgehen lassen und die 4 zwischen diesen liegenden Grate auf Giebelspitzen setzen lassen (Fig. 378); endlich kann man von den 8 Graten im untersten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zusammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen sind nur 4 Auflager vorhanden; die Überführung vom Viereck in das Achteck ist besonders zu untersuchen.

124. Achtseitige Turmpyramide mit 4 Lagerpunkten.

α) Achtseitige Turmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 375 zeigt diese Lösung, wobei der gröfseren Allgemeinheit halber unter die achtseitige Pyramide noch eine vierseitige, ein Stockwerk hohe, abgestumpfte Pyramide ($ABCD\,1\,2\,3\,4$) gesetzt ist. Dieselbe kann man auch fortlassen; alsdann sind *1, 2, 3, 4* die Auflager. Da dieses untere Stockwerk nach vorstehendem geometrisch und statisch bestimmt ist, so bleibt das Ganze ebenso, falls der hinzukommende, oberhalb *1 2 3 4* befindliche Teil geometrisch und statisch bestimmt ist. Die zu führende Untersuchung gilt also auch für den in *1 2 3 4* aufgelagerten

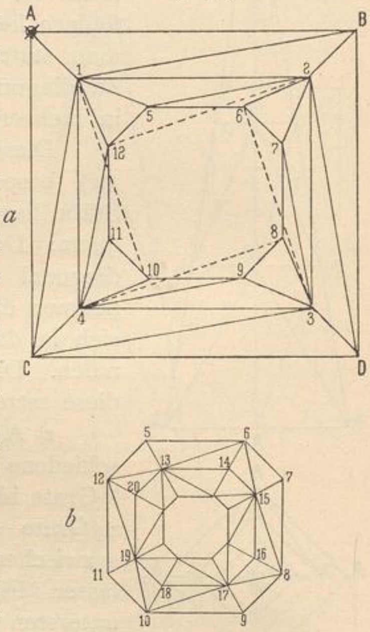
[178]) Das vorstehend angewendete Verfahren, welches stets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, ist angegeben in: MÜLLER-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.

Turm. Das achtseitige Turmdach soll nunmehr aus dem Unterbau dadurch entwickelt werden, dafs jeder neue Knotenpunkt durch drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knotenpunkte angeschlossen wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen dürfen. Punkt *12* ist mit *1*, *4*, *2* verbunden. Die Stäbe *12 1* und *12 4* liegen in begrenzenden Ebenen, *12 2* aber nicht. Ferner sind angegliedert: Punkt *5* an *12*, *1*, *2*, Punkt *6* an *2*, *5*, *3* und so weiter. Die weiteren Stockwerke ergeben sich einfach; sie sind der gröfseren Deutlichkeit halber in einer besonderen Abbildung (Fig. 375 *b*) gezeichnet. Bei diesen liegen alle Stäbe in den begrenzenden Ebenen; das Innere bleibt frei. In Fig. 375 *a* sind 16 Knotenpunkte und 40 Stäbe, also thatsächlich

$$s = 3k - 8\,.$$

Fig. 375.

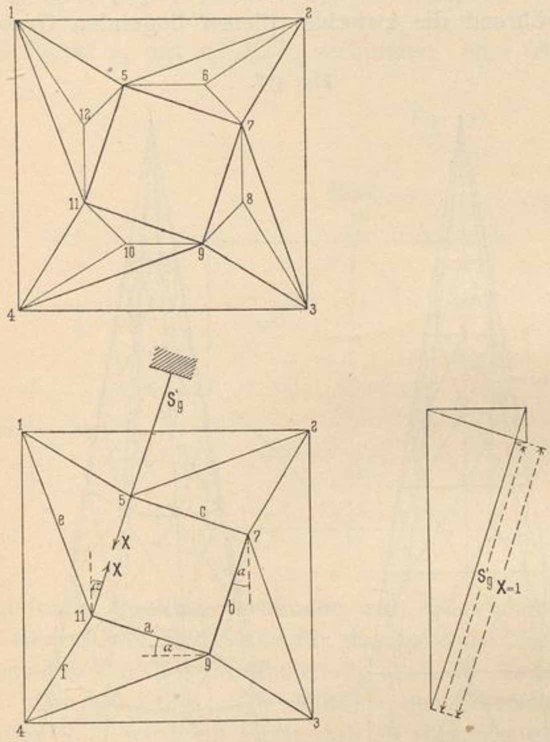
a



b

Die vier in Fig. 375 *a* punktierten Stäbe (*12 2*, *6 3*, *8 4*, *10 1*), welche weder in Seitenflächen der Pyramiden noch in wagrechten Ebenen liegen, sind unbequem; man kann sie vermeiden. Man lege das tiefstliegende Achteck (*5 6 7 8 9 10 11 12*) gegen den unteren vierseitigen Teil geometrisch fest, indem man die Punkte *1*, *2*, *3*, *4* als feste Punkte betrachtet (was sie ja sind) und die 8 hinzukommenden Knotenpunkte durch $3 \cdot 8 = 24$ Stäbe anschliefst. Dabei sind verschiedene Stabanordnungen möglich; eine solche ist in Fig. 376 angegeben. Man verbinde zunächst Punkt *5* durch Stab *5 1* und *5 2* mit bezw. *1* und *2*; alsdann fehlt zunächst für die Bestimmung von *5* noch ein Stab, was vorläufig bemerkt werde. Nunmehr betrachte man, vorbehältlich späteren Nachtrages, Punkt *5* als fest, verbinde Punkt *7* mit *5*, *2*, *3*, Punkt *9* mit *7*, *3*, *4* und Punkt *11* mit *9*, *4*, *1*. Punkt *6* kann man nun mit *5*, *7*, *2*, Punkt *8* mit *7*, *3*, *9*, Punkt *10* mit *11*, *9*, *4* und Punkt *12* mit *5*, *11*, *1* verbinden. Die Verbindungsstäbe der 4 letztgenannten Punkte können für die vorläufige Betrachtung fortgelassen werden, da das ganze Fachwerk stabil ist, wenn es ohne diese 12 Stäbe stabil ist. Nunmehr fehlt noch ein Stab, da Punkt *5* nur mit 2 festen Punkten durch Stäbe verbunden war; es möge nun Stab *5 11* hinzugefügt werden; das Fachwerk hat dann die vorgeschriebene Zahl von Stäben. Wird nur das Fachwerk ohne die Knotenpunkte *6*, *8*, *10*, *12* betrachtet, so sind 4 Knotenpunkte und 12 Stäbe hinzugekommen. Ergiebt sich bei beliebiger Belastung für die Spannung des Stabes *11 5* ein reeller Wert, so ist das Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt. Um diese Untersuchung zu führen, werde der Stab *11 5* herausgenommen und durch die darin herrschende, unbekannte Spannung X ersetzt; da aber dann ein Stab fehlt, wird ein Ersatzstab S_g' angebracht, der, in der wagrechten Ebene liegend, nach einem festen Punkte geführt werde. In Fig. 376 ist der feste Punkt durch Schraffierung angedeutet. Nun wirke in Knotenpunkt *11* eine beliebige äufsere Kraft P in beliebiger Richtung, aufserdem X in der Richtung *11 5*; erstere zerlegt sich in Punkt *11* nach den Richtungen der jetzt hier noch vorhandenen Stäbe (*11 1*, *11 4*, *11 9*); diese Spannungen sind leicht zu ermitteln und können als bekannt angenommen werden. Die in *11 1* und *11 4* wirkenden Kräfte gehen nach den festen Punkten *1* und *4*; die Spannung in *11 9* zerlegt sich in Punkt *9* gleichfalls nach den Richtungen der dort zusammentreffenden 3 Stäbe, von welchen zwei nach den festen Punkten *4* und *3* gehen und diejenige in *9 7* nach Punkt *7* geht. So geht die Zerlegung weiter; die Spannung in *7 5* zerlegt sich in Punkt *5* nach den drei Stabrichtungen *5 1*, *5 2* und S_g'. Alle diese Spannungen sind bestimmt und leicht zu finden. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{S}$; diejenige im Ersatzstab sei $\mathfrak{S}_0$. Außer der Kraft P wirken noch die beiden unbekannten Stabspannungen X in *11*, bezw. *5*. Die in Punkt *11* wirkende Kraft X erzeugt Spannungen, welche X-mal so groß sind, als diejenigen, welche durch die Kraft $X = 1$ erzeugt werden würden. Wir nennen die letzteren σ und ermitteln dieselben. Die in Punkt *11* wagrecht wirkende Kraft $X = 1$ zerlegt sich in zwei wagrechte Kräfte: in die Resultierende von den Spannungen der Stäbe e und f, welche mit e und f in derselben Ebene liegt, also, da sie auch wagrecht ist, parallel zur Linie *1 4* sein muß, und in die Spannung a des Stabes a. Man sieht leicht, daß

Fig. 376.



$$\frac{a}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

ist; a ist Druck, also

$$a = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Überlegt man in gleicher Weise, daß a am Punkte *9* sich ganz ähnlich zerlegt, so erhält man (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 376):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad b = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

b ist Zug. Weiter erhält man $c = -\operatorname{tg}^3\alpha$ und $d = -\operatorname{tg}^4\alpha$; d bedeutet die Spannung, welche im Ersatzstabe durch die im Punkte *11* wirkende Einzelkraft $X = 1$ erzeugt wird. Die im Punkte *5* wirkende Einzelkraft $X = 1$ ruft im Ersatzstabe die Zugspannung 1 hervor; beide Kräfte $X = 1$, welche in den Punkten *5* und *11* wirken, erzeugen demnach zusammen im Ersatzstabe die Summenspannung $\sigma = 1 - \operatorname{tg}^4\alpha$; die gesamte im Ersatzstabe durch beide Kräfte X und durch P erzeugte Spannung ist demnach

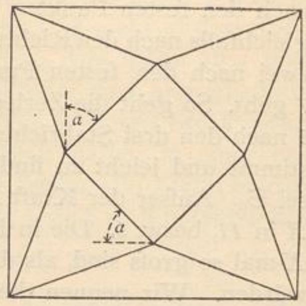
$$S = \mathfrak{S}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4\alpha)\,X.$$

Da aber die Spannung im Ersatzstabe gleich Null sein muß — derselbe ist ja nicht vorhanden —, so lautet die Bedingungsgleichung für X:

$$0 = \mathfrak{S}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4\alpha)\,X \quad \text{oder} \quad X = -\frac{\mathfrak{S}_0}{1 - \operatorname{tg}^4\alpha}.$$

X wird ∞, wenn $1 - \operatorname{tg}^4\alpha = 0$, d. h. wenn $\alpha = 45$ Grad ist. Auch für Winkel, deren Größe nahe an 45 Grad liegt, ist die Konstruktion nicht zu empfehlen. Für

Fig. 377.

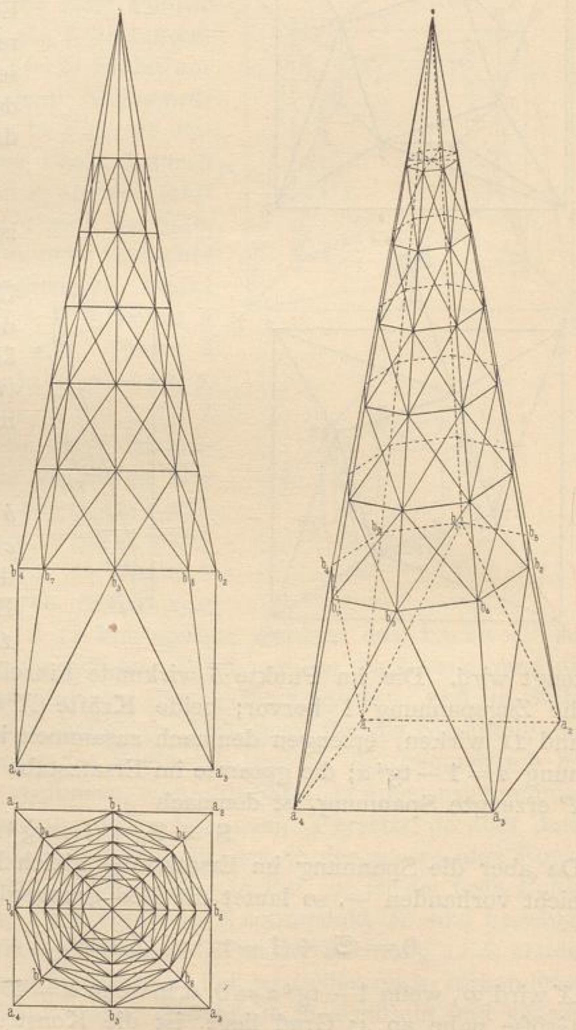


Winkelwerte von α, welche von 45 Grad stark abweichen, ist die Konstruktion ausführbar. — Auf dem Achteck $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9\, 10 \cdot 11 \cdot 22$ (Fig. 375*a*, bezw. 376) kann nun der weitere Aufbau vorgenommen werden. — Nicht brauchbar ist nach vorstehendem beispielweise der Aufbau nach Fig. 377, bei welchem die Eckpunkte des oberen Quadrats den Mitten des unteren Quadrats entsprechenden und $\alpha = 45$ Grad ist.

125. Achtseitige Turmpyramide mit vier Gratsparren auf Giebelspitzen.

Eine andere Lösung, die achtseitige Pyramide auf nur vier Auflager zu setzen, wird unter Benutzung von vier Giebeldreiecken im untersten Stockwerk des Turmes erhalten; diese Turmkonstruktion ist vielfach von *Otzen* ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrats $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ (Fig. 378) gehen vier Gratsparren hinab, während die zwischen diesen liegenden Gratsparren sich auf die Spitzen b_1, b_2, b_3, b_4 von vier Giebeldreiecken setzen, also ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als die erstgenannten Gratsparren. Von den Spitzen der Giebeldreiecke werden die Spannungen der Gratsparren durch Stäbe in die vier Auflagerpunkte der anderen Sparren geführt. Die Hauptauflager sind a_1, a_2, a_3, a_4; die Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 kann man als Giebelauflager ansehen. Damit die Giebelspitzen nicht durch die wagrechten Seitenkräfte der Sparrendrücke aus den lotrechten Ebenen herausgeschoben werden, sind in der Höhe derselben vier radiale Balken ($b_1\, b_3$, $b_2\, b_4$, $b_5\, b_7$, $b_6\, b_8$) angeordnet, welche im Verein mit dem umlaufenden Ringe $b_1\, b_5\, b_2\, b_6\, b_3\, b_7\, b_4\, b_8$ eine Scheibe bilden Es fragt sich, ob dieser Unterbau der achtseitigen Turmpyramide geometrisch bestimmt ist. Ergiebt sich die geometrische Bestimmtheit des Unterbaues, so kann man auf demselben weiter in der oben angegebenen Weise aufbauen, indem man stets einen neuen Knotenpunkt durch drei neue

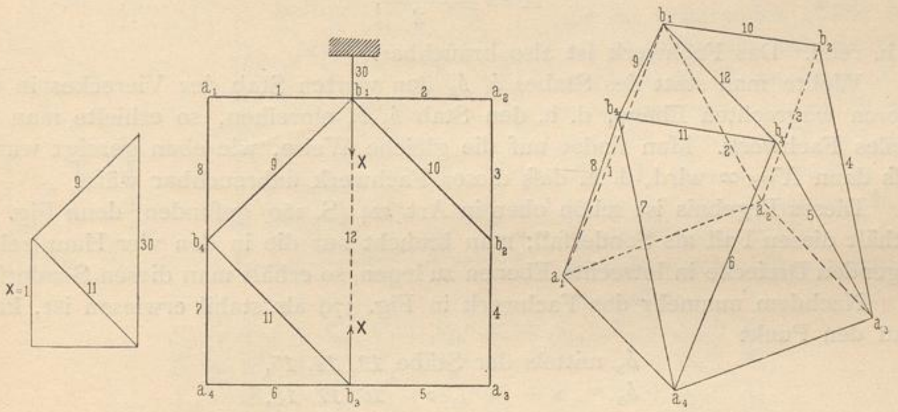
Fig. 378.



Stäbe an drei vorhandene Knotenpunkte anschliefst, welche mit dem neuen nicht in derselben Ebene liegen.

Im untersten Stockwerk sind vier Punktauflager vorhanden, nämlich a_1, a_2 a_3, a_4, also $n = 3 \cdot 4 = 12$ Auflagerunbekannte. Knotenpunkte sind in der Auflagerebene 4, in der durch die Giebelspitzen gelegten Ebene 8, also zusammen $k = 12$ vorhanden. Die Zahl der Stäbe mufs demnach $s = 3k - n$ und $s = 3 \cdot 12 - 12 = 24$ sein. Vorhanden sind: 8 Stäbe der Giebeldreiecke, 8 Stäbe des Ringes $b_1 \ldots b_8$, 4 Gratsparren und 4 in der Ebene der Giebelspitzen angeordnete einander kreuzende Balken; die Zahl der Stäbe stimmt also. Es ist zu untersuchen, ob die Anordnung derselben das Fachwerk geometrisch und statisch bestimmt macht. Wir bauen das Fachwerk wieder von unten auf (Fig. 379). a_1, a_2, a_3, a_4 sind die 4 festen Punkte, von denen ausgegangen wird; Punkt b_1 wird mit a_1 und a_2 verbunden; zunächst fehlt noch ein Stab, was im Gedächtnis behalten wird; Punkt b_4 wird mit a_1, a_4, b_1, Punkt b_3 mit a_4, a_3, b_4 und Punkt b_2 mit a_2, a_3, b_1 verbunden. Nun fehlt noch ein Stab, da b_1 nur mit

Fig. 379.



zwei festen Punkten verbunden war. Fügt man den Stab $b_1 b_3$ ein, so entspricht die Gesamtzahl der Stäbe für das so konstruierte Fachwerk der statischen und geometrischen Bestimmtheit; ob auch die Anordnung richtig ist, wird mittels des oben vorgeführten Verfahrens des Ersatzstabes untersucht. An Stelle des Stabes $b_1 b_3$ wird ein Ersatzstab *30* (Fig. 379) eingeführt, welcher das Fachwerk unzweifelhaft geometrisch und statisch bestimmt macht. Soll dieser Stab durch Stab *12* überflüssig werden, so mufs seine Spannung bei beliebiger Belastung des Fachwerkes gleich Null sein, ohne dafs im Stabe *12* eine unendlich grofse Spannung entsteht. Bezeichnet man die Spannung des Stabes *12* für beliebige Belastung des Fachwerkes mit X, so erzeugen die beiden Kräfte X, welche von Stab *12* in den Punkten b_1, bezw. b_3 auf das Fachwerk ausgeübt werden, in Stab *30* die Spannung $X\,\mathfrak{S}_{30}'$, in welchem Ausdruck $\mathfrak{S}_{30}'$ die Spannung ist, welche durch $X = 1$ im Stabe *30* erzeugt wird. Nennt man ferner die Spannung, welche durch irgend eine beliebige Belastung des Fachwerkes ohne den Stab *12*, aber mit Stab *30* in diesem letzteren Stabe hervorgerufen wird, $\mathfrak{S}_{0\,30}$, so ist die gesamte bei dieser Belastung im Stabe *30* auftretende Spannung

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{0\,30} + \mathfrak{S}_{30}'\,X.$$

$X = 1$ zerlegt sich im Punkte b_3 in eine Seitenkraft parallel zu $a_4 a_3$ und eine in die Stabrichtung *11* fallende Kraft; es ist

$$\mathfrak{S}_{11}' = -\frac{1}{\cos\alpha}.$$

α ist der Winkel des Stabes *11* mit $b_1\, b_3$, hier $= 45$ Grad. $\mathfrak{S}_{11}'$ zerlegt sich in b_4 weiter nach der Richtung des Stabes 9 und nach der Parallelen zu $a_1\, a_4$; $\mathfrak{S}_9'$ im Punkte b_1 nach der Richtung parallel zu $a_1\, a_2$ und der Richtung von Stab *30*. Die Spannung $\mathfrak{S}_{10}'$ ist Null, weil in b_2 keine Kraft von Stab *10* übertragen werden kann. Durch $X = 1$ im Punkt b_3 und $X = 1$ im Punkt b_1 wird demnach (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 379)

$$\mathfrak{S}_{30}' = 1 + 1 = 2$$

erzeugt; demnach ist

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{0\,30} + 2\,X.$$

Der Ersatzstab *30* ist überflüssig, d. h. die Konstruktion ohne ihn ausreichend, wenn für beliebige Belastung die Spannung S_{30} gleich Null ist, dabei aber X einen reellen Wert hat. Für $S_{30} = 0$ wird

$$X = -\frac{\mathfrak{S}_{0\,30}}{2},$$

d. h. reell. Das Fachwerk ist also brauchbar.

Wollte man statt des Stabes $b_1\, b_3$ den vierten Stab des Viereckes in der oberen wagrechten Ebene, d. h. den Stab $b_2\, b_3$ einreihen, so erhielte man ein labiles Fachwerk. Man findet auf die gleiche Weise, wie eben gezeigt wurde, dafs dann $X = \infty$ wird, d. h. dafs dieses Fachwerk unbrauchbar wäre.

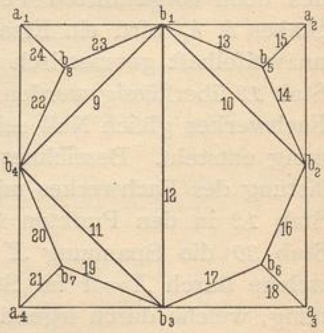
Dieses Ergebnis ist schon oben in Art. 124 (S. 160) gefunden; denn Fig. 377 enthält diesen Fall als Sonderfall; man braucht nur die in den vier Hauptseiten liegenden Dreiecke in lotrechte Ebenen zu legen, so erhält man diesen Sonderfall.

Nachdem nunmehr das Fachwerk in Fig. 379 als stabil erwiesen ist, kann man den Punkt

b_5 mittels der Stäbe *13, 14, 15,*
b_6 » » » *16, 17, 18,*
b_7 » » » *19, 20, 21,*
b_8 » » » *22, 22, 24*

festlegen (Fig. 380). Man sieht, dafs dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist. Fügt man Stab $b_2\, b_3$ ein, so wird das Fachwerk statisch unbestimmt, aber nicht labil. Bei eisernen Türmen kann man diesen Stab an einer Seite mit länglichen Schraubenlöchern befestigen, so dafs er für die Berechnung als nicht vorhanden angesehen werden kann. Nun kann man weiter in bekannter Weise aufbauen. In Fig. 378 (S. 160) ist dieser Aufbau gezeichnet, dabei aber jedes Seitenfeld mit zwei gekreuzten Diagonalen versehen, welche als Gegendiagonalen wirken. Die Konstruktion ist, abgesehen von der Spitze, statisch bestimmt. In der isometrischen Ansicht von Fig. 378 sind der gröfseren Deutlichkeit wegen die Stäbe *9, 10, 11, 12* weggelassen.

Fig. 380.



Nachdem die Stabilität von Fig. 380 nachgewiesen ist, bleibt zu untersuchen, ob das Fachwerk stabil bleibt, wenn Stab *11* durch $b_5\, b_7$, d. h. durch *31*, Stab *9* durch $b_6\ b_8$, d. h. durch *32*, Stab *10* durch $b_2\ b_4$, d. h. durch *33*, und Stab *30* durch $b_1\ b_3$, d. h. durch *12* ersetzt werden (Fig. 381).

Der Gang der Untersuchung ist folgender. Jeder neu einzuführende Stab überträgt in seinen Anschlufsknotenpunkten noch unbekannte Kräfte X auf dieselben und erzeugt in den zu ersetzenden Stäben Spannungen, welche den Kräften X proportional sind. In den Stäben *31, 32, 33, 12* (Fig. 381) mögen die Spannungen X_1, X_2,' X_3, X_4 wirken, welche in dem zu ersetzenden Stabe *11* die Spannungen

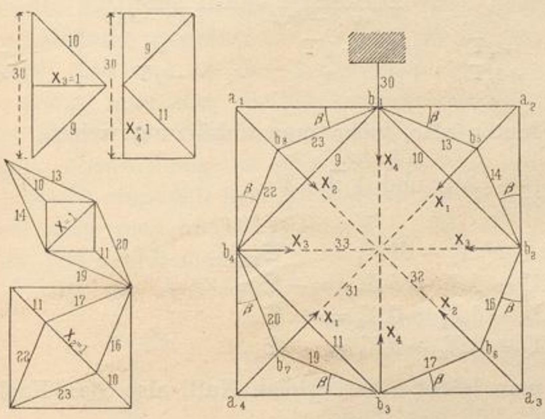
$$S_{11}' X_1 ,\quad S_{11}'' X_2 ,\quad S_{11}''' X_3 ,\quad S_{11}'''' X_4$$

und im Stabe *9* die Spannungen

$$S'_9 X_1 ,\quad S_9'' X_2 ,\quad S_9''' X_3 ,\quad S_9'''' X_4 \text{ u. s. w.}$$

erzeugen mögen. Die sonst noch vorhandenen äufseren Lasten rufen in den Stäben die Spannungen $\mathfrak{S}$ hervor, d. h. in den Stäben *9, 10, 11, 30* die Spannungen $\mathfrak{S}_9$, $\mathfrak{S}_{10}$, $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{30}$. Die Spannungen $\mathfrak{S}$ würden allein vorhanden sein, wenn die Stäbe *31, 32, 33, 12* nicht und nur die zu ersetzenden Stäbe *9, 19, 11, 30* vorhanden wären. Offenbar sind die S' die durch $X_1 = 1$ erzeugten Spannungen, S'', bezw. S''', S'''' die durch $X_2 = 1$, bezw. $X_3 = 1$, $X_4 = 1$ erzeugten Spannungen. Die gesamten in den zu ersetzenden Stäben *9, 10, 11, 30* auftretenden Spannungen sind nunmehr

Fig. 381.



$$\begin{aligned}
S_{30} &= \mathfrak{S}_{30} + S_{30}' X_1 + S_{30}'' X_2 + S_{30}''' X_3 + S_{30}'''' X_4 ,\\
S_9 &= \mathfrak{S}_9 \ \ + S_9'\ X_1 + S_9''\ X_2 + S_9'''\ X_3 + S_9''''\ X_4 ,\\
S_{10} &= \mathfrak{S}_{10} + S_{10}' X_1 + S_{10}'' X_2 + S_{10}''' X_3 + S_{10}'''' X_4 ,\\
S_{11} &= \mathfrak{S}_{11} + S_{11}' X_1 + S_{11}'' X_2 + S_{11}''' X_3 + S_{11}'''' X_4 .
\end{aligned}$$

Sollen die Stäbe *9, 10, 11, 30* ersetzbar sein, so müssen die Spannungen dieser Stäbe den Wert Null haben, ohne dafs dadurch diejenigen in den ersetzenden Stäben X_1, X_2, X_3, X_4 unendlich grofs werden. Die Bedingungsgleichungen für die Werte von X_1, X_2, X_3, X_4 sind demnach:

$$S_{30} = S_9 = S_{10} = S_{11} = \text{Null},$$

d. h.

$$\begin{aligned}
X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_3 S_{30}''' + X_4 S_{30}'''' &= -\mathfrak{S}_{30} ,\\
X_1 S_9'\ \ + X_2 S_9''\ \ + X_3 S_9'''\ \ + X_4 S_9''''\ \ &= -\mathfrak{S}_9 ,\\
X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_3 S_{10}''' + X_4 S_{10}'''' &= -\mathfrak{S}_{10} ,\\
X_1 S_{11}' + X_2 S_{11}'' + X_3 S_{11}''' + X_4 S_{11}'''' &= -\mathfrak{S}_{11} .
\end{aligned}$$

Sollen X_1, X_2, X_3, X_4 reell sein, so darf die Nennerdeterminante vorstehender Gleichungen nicht gleich Null sein; wenn dies stattfindet, so ist das Fachwerk labil. Wendet man diese Überlegung auf das zu betrachtende Turmfachwerk an, und bringt in den betreffenden Knotenpunkten die Kräfte X_1, X_2, X_3, X_4 als äufsere Kräfte an, so erhält man durch Zerlegung die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werte der Stabspannungen S', S'', S''', S'''', welche bezw. durch die Kräfte $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$ erzeugt werden.

Tabelle der Spannungen, welche in den Fachwerkstäben erzeugt werden durch:

	in Stab *13*	*14*	*16*	*17*	*19*	*20*
$X_1 = 1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$
$X_2 = 1$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0
$X_3 = 1$	0	0	0	0	0	0
$X_4 = 1$	0	0	0	0	0	0

	Stab *22*	*23*	*9*	*10*	*11*	*30*
$X_1 = 1$	0	0	$-\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_2 = 1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_3 = 1$	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	-2
$X_4 = 1$	0	0	$+\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	$+2$

Die Bedingungsgleichungen lauten also, wenn man abkürzungsweise

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = b$$

setzt:

$$\begin{aligned} 0\,X_1 + 0\,X_2 - b^2 X_3 + b^2 X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a\,X_1 + 0\,X_2 - b\,X_3 + b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a\,X_1 + a\,X_2 - b\,X_3 + 0\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ a\,X_1 + a\,X_2 + 0\,X_3 - b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante ist, wie man leicht sieht, gleich Null, also das Fachwerk labil.

Wenn aber der Stab *11* im Fachwerk belassen und davon abgesehen wird, Stab *11* durch Stab *33* zu ersetzen, so erhält man ein stabiles Fachwerk. Alsdann lauten die Gleichungen, da nunmehr X_3 gleich Null ist:

$$\begin{aligned} X_1\,S_{30}' + X_2\,S_{30}'' + X_4\,S_{30}'''' &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1\,S_9' + X_2\,S_9'' + X_4\,S_9'''' &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1\,S_{10}' + X_2\,S_{10}'' + X_4\,S_{10}'''' &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Mit den Werten obiger Tabelle heifsen diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0\,X_1 + 0\,X_2 + b^2\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a\,X_1 + 0\,X_2 + b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a\,X_1 + a\,X_2 + 0\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante dieser Gleichungen hat den Wert:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & b^2 \\ -a & 0 & b \\ a & a & 0 \end{matrix}\right\} = -b^2 a^2 = -2\,\frac{\sin^2\beta}{(\cos\beta - \sin\beta)^2}.$$

Das in Fig. 382 dargestellte Fachwerk ist also stabil, falls nicht β gleich Null ist. Dieser Wert ist ausgeschlossen, ebenso der Wert $\beta = 45$ Grad, für den $a = \infty$ würde; aber auch Winkelwerte von β, welche sich dem Nullwerte nähern, sollten vermieden werden.

Die meist übliche Anordnung mit vier in der Ebene $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ einander kreuzenden Stäben ist dagegen nach vorstehender Entwickelung nicht stabil; wenn

Fig. 382.

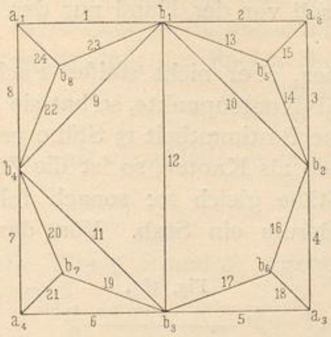
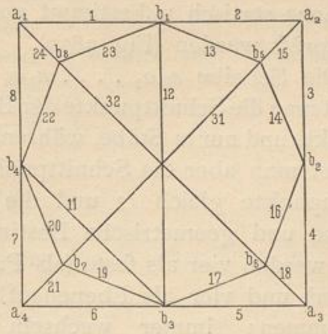


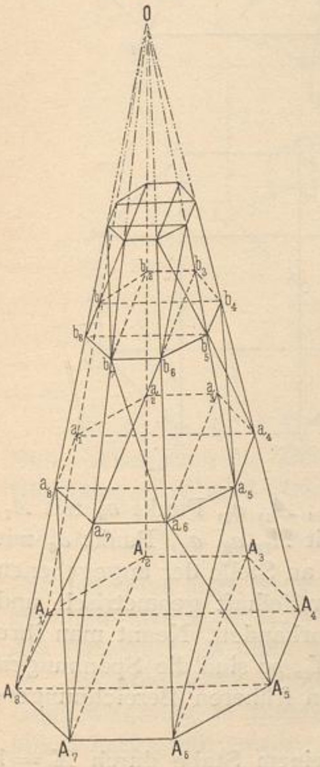
Fig. 383.



dieselbe trotzdem in der Praxis zu Aussetzungen bislang unseres Wissens keine Veranlassung gegeben hat, so liegt dies darin, daſs die Verbindungen nicht gelenkig sind und an den Knotenpunkten Momente übertragen werden können. So wenig man aber die Hängewerke mit für die statische Bestimmtheit fehlenden Stäben als eine in jeder Beziehung befriedigende Stabanordnung erklären kann, ebensowenig ist dies mit der hier angegebenen Konstruktion der Fall. Vielleicht empfiehlt sich am meisten das in Fig. 382 dargestellte Fachwerk. Eventuell ziehe man auch den Stab $b_2\ b_3$ ein, der das Fachwerk statisch unbestimmt, aber nicht labil macht.

Auf das Achteck $b_1\ b_5\ b_2\ b_6\ b_3\ b_7\ b_4\ b_8$ kann man nun die weitere Turmkonstruktion aufbauen, wie in Art. 124 (Fig. 375 *b*) angegeben ist, indem man nach und nach stets einen Knotenpunkt und drei Stäbe hinzufügt. Besonders werde bemerkt, daſs in den wagrechten Trennungsebenen der oberen Geschosse nunmehr nur noch die achteckigen Ringe angeordnet zu werden brauchen. Das Raumfachwerk ist mit diesen stabil.

Fig. 384.



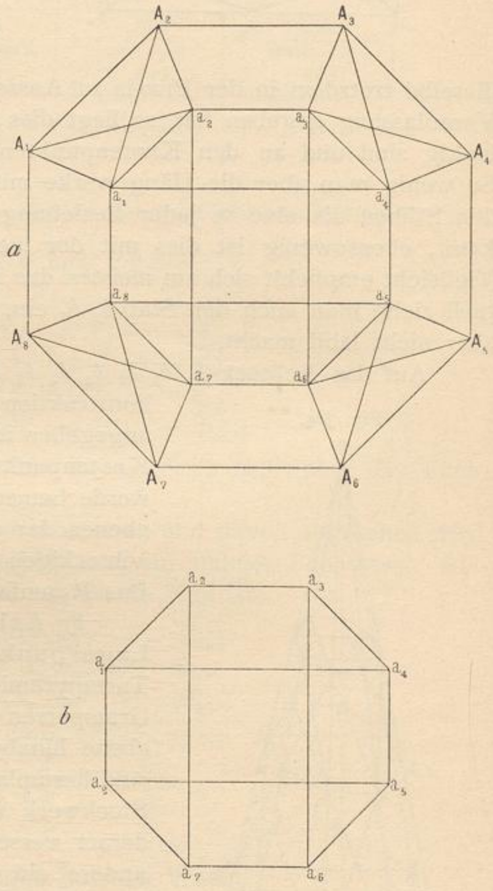
b) Achtseitige Turmpyramide mit acht Lagerpunkten. Hier ist zunächst die *Moller*'sche Turmpyramide (Fig. 384) zu betrachten. Alle acht Gratsparren sind bis zur gemeinsamen Auflagerebene hinabgeführt; zwischen je zwei Stockwerken sind herumlaufende Ringe angeordnet und in jedem Stockwerk vier Seitenfelder mit gekreuzten Stäben derart versehen, daſs stets nur ein Feld um das andere ein solches Andreaskreuz hat; diese verkreuzten Felder wechseln in den verschiedenen Stockwerken. Auſserdem sind in den vier geneigten Ebenen $A_1 A_4 O$, $A_8 A_5 O$, $A_2 A_7 O$ und $A_3 A_6 O$ quer durchlaufende Balken, d. h. für das Stabsystem Stäbe $a_1 a_4$, $a_8 a_5$, $a_2 a_7$, $a_3 a_6$, bezw. $b_1 b_4$, $b_8 b_5$, $b_2 b_7$, $b_3 b_6$ vorhanden. In Fig. 384 bezeichnet O die Spitze der Turmpyramide. Demnach ergiebt sich zwischen je zwei Stockwerken eine Figur, wie in Fig. 385 *b* dargestellt ist. Nunmehr soll untersucht werden, ob dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt

126.
Moller'sche
Turm-
pyramide.

ist, wobei zunächst, wie bisher stets, von der Spitze abgesehen werden soll, welche das Ganze statisch unbestimmt macht; ferner soll vor der Hand nur der Unterteil geprüft werden (Fig. 385*a*).

Die Scheibe $a_1 a_2 \ldots . a_7 a_8$ ist ein ebenes, aber nicht steifes Fachwerk; rechnet man die Schnittpunkte der Balken nicht als Knotenpunkte, so hat sie 8 Knotenpunkte und nur 12 Stäbe, während die statische Bestimmtheit 13 Stäbe verlangt. Rechnet man aber die Schnittpunkte der Balken als Knoten, so ist die Zahl der Knotenpunkte gleich 12 und die Zahl der Stäbe gleich 20; sonach fehlt für statische und geometrische Bestimmtheit wiederum ein Stab. Von den Auflagern werden vier als feste (als Punktauflager) und vier als Ebenenauflager angenommen; immer wechseln ein Punkt- und ein Ebenenauflager ab. Die vier Querbalken in der Auflagerebene sind dann, wenn ein Ring in derselben angeordnet wird, für die geometrische Bestimmtheit überflüssig und sollen als nicht vorhanden angesehen werden. Die Anzahl der Knotenpunkte des untersten Stockwerkes ist $k = 16$, die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 4 \cdot 3 + 4 = 16$ und diejenige der Stäbe $s = 36$; für geometrische und statische Bestimmtheit müfste $s^1 = 3k - n = 32$ sein; das betrachtete Raumfachwerk ist also vierfach statisch unbestimmt. Ordnet man aber statt der gekreuzten Stäbe in den vier Seitenfeldern einfache Stäbe an, so ist die erste Bedingung der statischen Bestimmtheit erfüllt.

Fig. 385.



Dieses Fachwerk soll untersucht werden; es genügt, ein Stockwerk, etwa das unterste, zu betrachten. Baut man dasselbe (Fig. 386) auf den acht Auflagern $A_1 \ldots A_8$ so auf, dafs man jeden hinzukommenden Punkt mit drei bereits festen Punkten verbindet, so mufs man wieder einige Ersatzstäbe — hier sind die Stäbe *25* und *26* gewählt — zu Hilfe nehmen. Verbunden sind: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C, Punkt a_4 mit A_3, A_4, a_1, Punkt a_5 mit A_5, A_6, a_4, Punkt a_8 mit A_7, A_8, a_5; ferner Punkt a_2 mit A_2, a_1, D, Punkt a_7 mit A_7, a_8, a_2, Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7, Punkt a_3 mit A_3, a_4, a_6. In Wirklichkeit sind an Stelle der angegebenen Ersatzstäbe *25* und *26*, welche das Fachwerk unzweifelhaft geometrisch und statisch bestimmt machen, die Stäbe $a_1 a_8$ und $a_2 a_3$ vorhanden. Nennt man ihre Spannungen bei beliebiger Belastung bezw. X_1 und X_2, so sind die Spannungen in den einzelnen Stäben, nach Früherem und mit den früheren Bezeichnungen,

$$S = \mathfrak{S} + S' X_1 + S'' X_2 .$$

S' ist die in einem Stabe durch $X_1 = 1$, S'' die in einem Stabe durch $X_2 = 1$

erzeugte Spannung. In den Ersatzstäben müssen für beliebige Belastung die Spannungen $S=0$ werden, wenn dieselben überflüssig sein sollen; die X_1 und X_2 dürfen dabei aber nicht unendlich grofs werden. Mithin ist die Bedingung für die Standfähigkeit des Fachwerkes: die Nennerdeterminante der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} S_{25}'X_1 + S_{25}''X_2 = -\mathfrak{S}_{25}, \\ S_{26}'X_1 + S_{26}''X_2 = -\mathfrak{S}_{26} \end{array}\right\} \quad \text{. . . . . 10.}$$

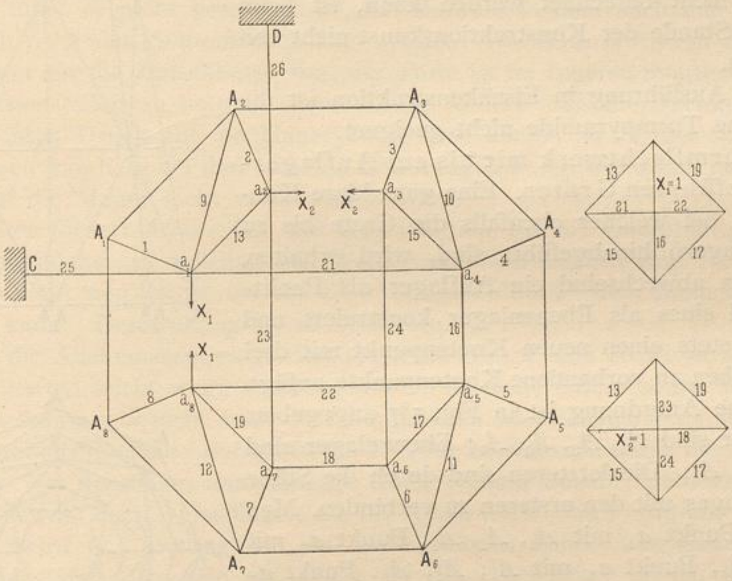
mufs von Null verschieden sein, d. h.

$$\left\{\begin{array}{l} S_{25}' . S_{25}'' \\ S_{26}' . S_{26}'' \end{array}\right\} \gtrless 0.$$

Die Werte S' und S'' ergeben sich leicht aus den Kräfteplänen in Fig. 386. Man erhält:

$$S_{22}' = -1,\ S_{16}' = +1,\ S_{21}' = -1,$$
$$S_{25}' = 0,\ S_{26}' = 0,$$
$$S_{24}'' = -1,\ S_{18}'' = +1,\ S_{22}'' = 0,$$
$$S_{23}'' = -1,\ S_{26}'' = 0,\ S_{16}'' = 0 = S_{21}'',$$
$$\mathfrak{S}_{25}'' = 0.$$

Fig. 386.

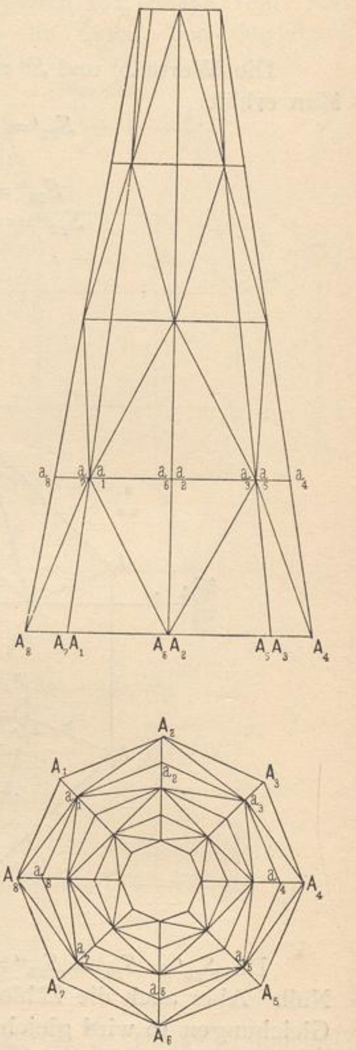


Da $S_{25}' = S_{26}' = S_{25}'' = S_{26}'' = 0$ sind, so ist die Nennerdeterminante gleich Null. Aber auch die Zählerdeterminante in den Ausdrücken für X_1 und X_2 der Gleichungen 10 wird gleich Null; mithin erhält man sowohl für X_1, wie für X_2 zunächst den Wert $\frac{0}{0}$, also einen unbestimmten Wert, der auch endlich sein kann. Dividiert man aber beide Gleichungen 10 durch $S_{25}' = S_{25}'' = S_{26}' = S_{26}''$, so sieht man, dafs sich $X_1 = X_2 = \infty$ ergiebt. Sonach dürfen die Ersatzstäbe nicht fehlen; das Fachwerk ist ohne dieselben labil.

Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob nicht durch Einziehen einer Gegendiagonale in eines der bereits mit Diagonalen versehenen Felder die Stabilität hergestellt würde. Versieht man etwa Feld $A_1\,A_2\,a_2\,a_1$ mit einer zweiten

Diagonale, so wird zunächst die Gesamtzahl der Stäbe um einen Stab gröfser, als mit der statischen Bestimmtheit vereinbar ist; aber stabil wird das Fachwerk dadurch nicht. Denn in der Ebene dieses Feldes liegen die Punkte desselben schon, falls nur eine Diagonale vorhanden ist, fest, werden also durch die zweite Diagonale nur überbestimmt; das Verhältnis dieser Scheibe gegen das übrige Fachwerk aber, also für etwaige Drehungen derselben um die Achse $A_1 A_2$, bleibt vollständig unverändert. War sonach das frühere Fachwerk labil, so ist es auch das Fachwerk nach Einziehen der Gegendiagonale. Das Gleiche gilt von den anderen drei Gegendiagonalen, welche möglich und üblich sind. Das Fachwerk ist also auch mit den Gegendiagonalen eine labile Konstruktion.

Fig. 387.



Ob man unter diesen Verhältnissen weiterhin empfehlen kann, Turmdächer nach *Moller*'scher Konstruktion auszuführen, ist fraglich. Dieselben haben sich allerdings bisher gut gehalten; aber eine als nicht stabil erkannte Konstruktion, die überdies nicht berechnet werden kann, ist beim heutigen Stande der Konstruktionskunst nicht voll berechtigt.

Für Ausführung in Eisenkonstruktion ist die *Moller*'sche Turmpyramide nicht geeignet.

127. Turmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten.

c) Turmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten. Eine ganz klare Konstruktion, bei welcher ebenfalls die Grate bis zu den Auflagern hinabgeführt sind, wird erhalten, wenn man abwechselnd ein Auflager als Punktlager und eines als Ebenenlager konstruiert und nunmehr stets einen neuen Knotenpunkt mit drei neuen Stäben an vorhandene Knotenpunkte anfügt. Eine solche Anordnung ist in Fig. 387 angegeben. Punktlager sind A_1, A_3, A_5, A_7; Ebenenlager sind A_2, A_4, A_6, A_8. Die letzteren sind durch die Stäbe des Fufsringes mit den ersteren zu verbinden. Man verbinde Punkt a_1 mit A_1, A_2, A_8, Punkt a_3 mit A_2, A_3, A_4, Punkt a_5 mit A_4, A_5, A_6, Punkt a_7 mit A_6, A_7, A_8; alsdann sind a_1, a_3, a_5, a_7 als feste Punkte anzusehen. Nun verbinde man Punkt a_2 mit A_2, a_1, a_3, Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_5, Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7, Punkt a_8 mit A_8, a_7, a_1. In solcher Weise kann man weiter bauen und erhält, abgesehen von der Spitze, ein statisch bestimmtes Raumfachwerk. Dasselbe kann in Holz (zweckmäfsig mit eisernen Diagonalen in den Seitenflächen) ohne Schwierigkeit hergestellt werden.

2) Konstruktion der hölzernen Turmhelme.

128. Grundsätze.

Für die Konstruktion der hölzernen Türme hat *Moller*[179]) vor mehr als einem halben Jahrhundert Grundsätze aufgestellt, welche zum grofsen Teile auch

[179]) A. a. O., Heft 4.