Dächer im allgemeinen, Dachformen

Schmitt, Eduard

Stuttgart, 1901

ɗ) Vierseitige Turmpyramide.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78841

diejenige der hinzukommenden Stäbe σ, so ist das entstehende Fachwerk statisch bestimmt, wenn stattfindet:

$$s + \sigma = 3\,(k + \varkappa) - 6.$$

Es war aber auch $s = 3k - 6$, woraus folgt, dafs für den Fall statischer Bestimmtheit

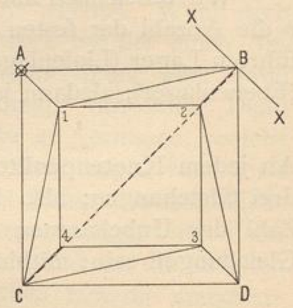
$$\sigma = 3\varkappa$$

sein mufs.

Soll also das Fachwerk auch nach dem Hinzufügen der neuen Knotenpunkte statisch bestimmt bleiben, so mufs stets die Zahl der hinzukommenden Stäbe 3 mal so grofs sein als die Zahl der hinzukommenden Knotenpunkte. Für $\varkappa = 1$ mufs $\sigma = 3$ sein.

Die Anordnung eines Turmes mit nur drei Fufspunkten ist nicht üblich; es sind aber auch Stützungen auf mehr als drei Füfsen als statisch bestimmte, räumliche Fachwerke möglich. Dies könnte auffallen, wenn man bedenkt, dafs nur dann die Auflagerdrücke eines Körpers mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, wenn die Zahl der Fufspunkte nicht gröfser als 3 ist. Bei einem Fachwerk aber kann man die Auflagerdrücke dennoch bestimmen, auch wenn die Zahl der in diesen enthaltenen Unbekannten gröfser als 6 ist; nur mufs man dafür Sorge tragen, dafs das Fachwerk eine gleiche Zahl Stäbe, also Unbekannte, weniger enthält, wie die Zahl der Unbekannten in den Auflagerdrücken gröfser ist als 6 (bezw. n). Selbstverständlich darf man nicht beliebige Stäbe entfernen und mufs in jedem Falle genau untersuchen, ob das entstehende Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist oder nicht. Ähnliche Anordnungen sind beim ebenen Fachwerk vorhanden, so bei den Bogenträgern mit 3 Gelenken, den Auslegerträgern etc. Man mufs also auch hier, wegen der hinzukommenden Auflagerunbekannten, neue Bedingungen durch die Konstruktion schaffen. Nachstehend sollen die beiden wichtigsten Fälle des vierseitigen und des achtseitigen Turmfachwerkes in dieser Hinsicht besprochen werden.

Fig. 371.



122. Vierseitige Turmpyramide.

δ) Vierseitige Turmpyramide. Die vier Fufspunkte derselben seien A, B, C, D (Fig. 371); einer derselben, etwa A, sei fest, ein zweiter, B, sei in einer Linie, etwa XX, die beiden anderen in der Ebene $ABCD$ beweglich. Die Auflagerdrücke enthalten also $n = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$ Unbekannte. Geht man vom Dreieck ABC aus, wobei A mit 3, B mit 2 und C zunächst mit einer Auflagerbedingung eingeführt werden, so sind alle drei Punkte in der Ebene genau durch die Auflagerbedingungen und die Längen der Dreieckseiten bestimmt, wenn nicht etwa die Auflagerbahn XX des Punktes B senkrecht zur Linie AB gerichtet ist. Der Punkt *1* in einer über ABC liegenden Ebene wird nunmehr durch die drei Stäbe $A\,1$, $B\,1$ und $C\,1$ geometrisch bestimmt. Das erhaltene Tetraëder ist geometrisch und statisch bestimmt. Verbindet man nunmehr den vierten Fufspunkt D mit 2 Punkten, etwa mit B und C, in derselben Ebene, so wird auch D geometrisch festgelegt, da dieser Punkt in der Ebene ABC bleiben mufs; der dritte Stab, welcher eigentlich erforderlich wäre, um C festzulegen, wird durch die Auflagerbedingung bei D ersetzt. Daraus folgt, dafs, wie die Spannung dieses (nicht angeordneten) Stabes stets bekannt wäre, wenn D kein Auflagerpunkt wäre, so auch der Auflagerdruck bei D stets nach statischen

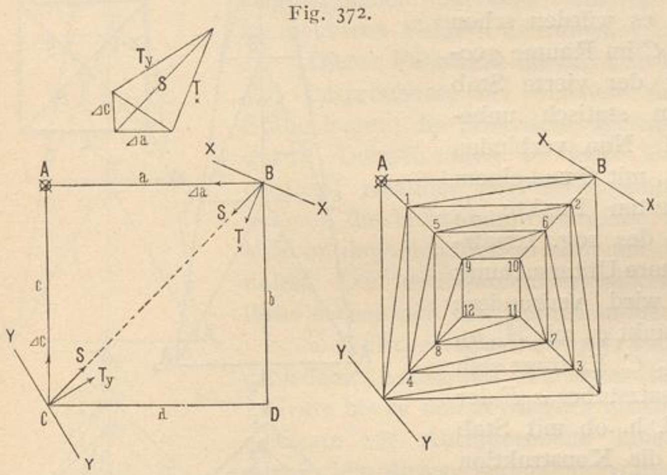
Gesetzen ermittelt werden kann. D ist als in der Ebene $ABCD$ beweglich zu konstruieren. (Man kann auch, wie dies mehrfach geschehen ist, für die Untersuchung den Auflagerdruck durch einen gedachten Stab ersetzen.) Für das Fachwerk mit 4 Stützpunkten nach Fig. 371 ist also die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 7$, die Zahl der Stäbe s und die Zahl der Knotenpunkte k; also mufs für den Fall statischer Bestimmtheit

$$s + 7 = 3k \text{ oder } s = 3k - 7$$

sein. Man kann nun Knotenpunkt *2* mit *1*, B, D, Punkt *3* mit *2*, D, C und Punkt *4* mit *3*, C, *1* verbinden und erhält so das in Fig. 371 gezeichnete Fachwerk, welches geometrisch und auch statisch bestimmt ist.

Bislang war angenommen, dafs ein Stab BC vorhanden sei; dieser Stab ist unbequem und für die Benutzung störend. Es fragt sich, ob, bezw. unter welchen Bedingungen dieser Stab fortgelassen werden kann. Stab BC war angeordnet, um Punkt C in der Auflagerebene geometrisch festzulegen. Man kann dies auch dadurch erreichen, dafs man für C, wie für B, eine Auflagerbahn, etwa YY (Fig. 372), vorschreibt; dieselbe kann beliebige Richtung haben; nur darf sie nicht senkrecht zu AC stehen, da sonst eine sehr kleine Bewegung des Punktes C, nämlich eine Drehung um A, möglich wäre. Wenn nun Punkt C ohne Stab BC festgelegt ist, so kann dieser fortfallen; das Fachwerk wird also durch Fortlassen des Stabes BC nicht labil.

Fig. 372.



Man kann sich dies auch dadurch klar machen, dafs man zunächst den Stab BC als vorhanden annimmt und untersucht, ob die Spannung desselben durch das wirklich vorhandene Fachwerk, d. h. nach Fortnahme von BC, geleistet werden kann. Ist die Spannung des Stabes BC gleich S_C, so zerlegt sich S_C in zwei Seitenkräfte, deren eine senkrecht zur Auflagerbahn YY, deren andere in die Linie AC fällt. In die Linie CD kann kein Teil der Kraft fallen, weil er in D (dort ist ein bewegliches Flächenlager) nicht aufgenommen werden kann. Ebenso wird die in B angreifende Kraft $S_B = S_C$ durch den Gegendruck der Auflagerbahn XX und die hinzukommende Spannung in BA geleistet. Die beiden Kräfte Δa in AB und Δc in CA werden dann im festen Punkte A in das Mauerwerk geleitet. Der Turm mit vier Fufspunkten kann also als statisch bestimmtes Fachwerk hergestellt werden, wenn ein Auflager fest, ein zweites Auflager in der Auflagerebene, die beiden weiteren Auflager in geraden Linien beweglich gemacht sind und an diese vier Auflagerpunkte weitere Punkte nach der allgemeinen Regel (je 1 Knotenpunkt und 3 Stäbe) angeschlossen werden. Grundbedingung für die Stabzahl ist hier, weil $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ ist,

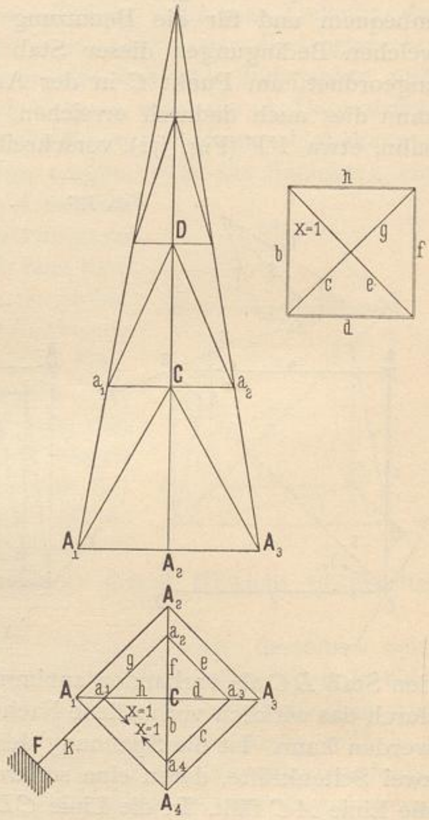
$$s = 3k - 8.$$

123. Vierseitige Turmpyramide mit Kaiserstiel.

Eine solche Anordnung zeigt Fig. 372, bei welcher die Spitze des Turmhelms nicht gezeichnet ist. Durch diese wird, weil hier ein Knotenpunkt mit 4 Stäben hinzukommt, das Fachwerk statisch unbestimmt; es bleibt aber geometrisch bestimmt.

Es liegt nahe, die vierseitige Turmpyramide dadurch zu versteifen, dafs man in die beiden lotrechten Diagonalebenen Dreieckverband legt. Diese Anordnung ist von den Alten vielfach ausgeführt und hat sich bewährt; aufser dieser Versteifung ist aber noch eine solche in den Seitenebenen anzubringen, worauf bereits *Moller*[177]) aufmerksam gemacht hat. Fig. 373 zeigt den Grundrifs und den Diagonalschnitt eines solchen Turmdaches; die Helmstange reicht bis zum Punkt C hinab; die Diagonalebenen sollen durch die Schrägstäbe $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$, $A_4 C$, $a_1 D$, $a_2 D$, $a_3 D$, $a_4 D$, u. s. w. versteift werden.

Fig. 373.



Um die Stabilität des Fachwerkes zu untersuchen, bauen wir von den vier festen Auflagern A_1, A_2, A_3, A_4 aus auf. Zunächst wird C mit allen vier Auflagern durch Stäbe verbunden; es würden schon drei Stäbe genügen, um C im Raume geometrisch fest zu legen; der vierte Stab macht die Konstruktion statisch unbestimmt, aber nicht labil. Nun verbinden wir a_1 durch Stäbe mit A_1, mit C und einem aufserhalb gelegenen festen Punkte F; wegen des Stabes $a_1 F$, des sog. Ersatzstabes k, ist noch eine weitere Untersuchung vorzunehmen. Ferner wird verbunden: Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, C. Es fragt sich nun, ob an Stelle des Ersatzstabes $a_1 F$ der Stab $a_1 a_4$ treten kann, d. h. ob mit Stab $a_1 a_4$, aber ohne Stab k die Konstruktion stabil ist. Zieht man den Stab $a_1 a_4$ ein, so möge bei beliebiger äufserer Belastung in demselben die Spannung X entstehen, welche bei a_4 und bei a_1 je in der Stabrichtung wirkt. Wäre Stab $a_1 a_4$ nicht vorhanden, so möge die bei irgend einer Belastung im Ersatzstab auftretende Spannung die Gröfse $\mathfrak{S}_{0k}$ haben; die aufserdem vorhandenen Kräfte X im Stabe $a_1 a_4$ erzeugen im Ersatzstab die Spannung $X S_k'$; demnach ist im ganzen im Stabe k die Spannung

$$S_k = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k'.$$

Soll die Konstruktion ohne Ersatzstab k stabil sein, so mufs für beliebige Belastung S_k gleich Null sein, X aber einen reellen Wert haben; d. h. es mufs

$$0 = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k' \text{ und } X = -\frac{\mathfrak{S}_{0k}}{S_k'}$$

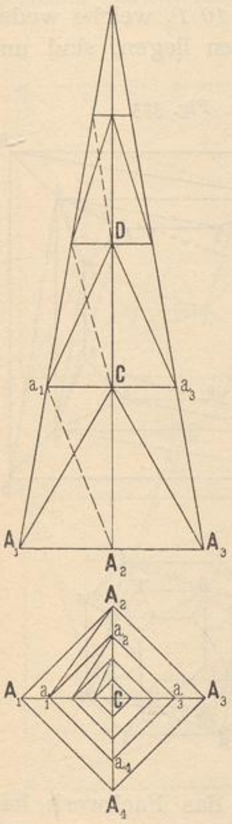
sein. Ergiebt sich $S_k' = 0$, so ist nur bei $X = \infty$ das Gleichgewicht möglich,

[177]) A. a. O., Heft 4.

d. h. das Gleichgewicht ist dann überhaupt nicht möglich. S_k' ist die Spannung, welche in Stab k durch $X = 1$ erzeugt wird. Man sieht leicht aus der graphischen Zerlegung in Fig. 373, dafs $S_k' = 0$, das Fachwerk also nicht brauchbar ist. Ist aber dieser Unterbau nicht stabil, so gilt das Gleiche vom weiteren Aufbau, zumal sich die Anordnung in den oberen Geschossen wiederholt[178]).

Zweifellos brauchbar wird aber die Konstruktion, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale $a_1 A_2$ (Fig. 373). Dann ergiebt sich der Aufbau wie folgt. Zunächst wird C wie oben im Raume festgelegt; nun wird verbunden: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C, Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_1. Stab $a_4 C$ wird gewöhnlich zugefügt; er ist überzählig, macht aber die Konstruktion nicht labil. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Die Helmstange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte C, D u. s. w. zu erleichtern. In der Ansicht (Fig. 374) sind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktiert. — Gewöhnlich wird man statt einer Diagonale Andreaskreuze oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, sondern in mehreren Feldern anordnen.

Fig. 374.



Dieses Fachwerk ist nicht so klar, wie das zuerst (Fig. 372) besprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktische Konstruktion ist aber sehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüber stehenden Gratsparren und nehmen die Helmstange zwischen sich; gegen diese setzen sich in den einander kreuzenden Mittelebenen die Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in diese setzen sich die Andreaskreuze.

ε) Achtseitige Turmpyramide. Bei dieser sind verschiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zur Auflagerebene hinabgehen lassen und die 4 zwischen diesen liegenden Grate auf Giebelspitzen setzen lassen (Fig. 378); endlich kann man von den 8 Graten im untersten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zusammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen sind nur 4 Auflager vorhanden; die Überführung vom Viereck in das Achteck ist besonders zu untersuchen.

124. Achtseitige Turmpyramide mit 4 Lagerpunkten.

α) Achtseitige Turmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 375 zeigt diese Lösung, wobei der gröfseren Allgemeinheit halber unter die achtseitige Pyramide noch eine vierseitige, ein Stockwerk hohe, abgestumpfte Pyramide ($ABCD\,1234$) gesetzt ist. Dieselbe kann man auch fortlassen; alsdann sind $1, 2, 3, 4$ die Auflager. Da dieses untere Stockwerk nach vorstehendem geometrisch und statisch bestimmt ist, so bleibt das Ganze ebenso, falls der hinzukommende, oberhalb 1234 befindliche Teil geometrisch und statisch bestimmt ist. Die zu führende Untersuchung gilt also auch für den in 1234 aufgelagerten

178) Das vorstehend angewendete Verfahren, welches stets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, ist angegeben in: Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.