



Dächer im allgemeinen, Dachformen

Schmitt, Eduard

Stuttgart, 1901

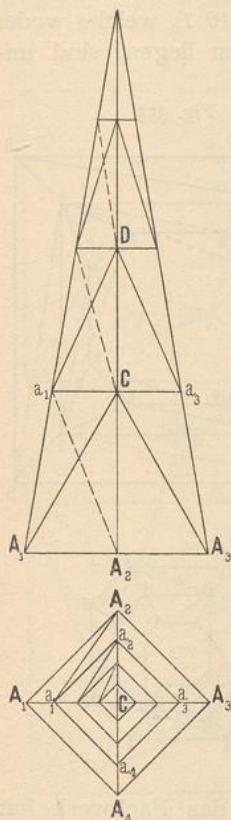
ε) Achtseitige Turmpyramide.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78841](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78841)

d. h. das Gleichgewicht ist dann überhaupt nicht möglich. S_k' ist die Spannung, welche in Stab k durch $X=1$ erzeugt wird. Man sieht leicht aus der graphischen Zerlegung in Fig. 373, daß $S_k'=0$, das Fachwerk also nicht brauchbar ist. Ist aber dieser Unterbau nicht stabil, so gilt das Gleiche vom weiteren Aufbau, zumal sich die Anordnung in den oberen Geschossen wiederholt¹⁷⁸⁾.

Zweifellos brauchbar wird aber die Konstruktion, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale a_1A_2 (Fig. 373). Dann ergibt sich der Aufbau wie folgt. Zunächst wird C wie oben im Raume festgelegt; nun wird verbunden: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C , Punkt a_2 mit A_2, a_1, C , Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_1 . Stab a_4C wird gewöhnlich zugefügt; er ist überzählig, macht aber die Konstruktion nicht labil. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Die Helmstange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte C, D u. s. w. zu erleichtern. In der Ansicht (Fig. 374) sind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktiert. — Gewöhnlich wird man statt einer Diagonale Andreaskreuze oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, sondern in mehreren Feldern anordnen.

Fig. 374.



Dieses Fachwerk ist nicht so klar, wie das zuerst (Fig. 372) besprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktische Konstruktion ist aber sehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüber stehenden Gratsparren und nehmen die Helmstange zwischen sich; gegen diese setzen sich in den einander kreuzenden Mittelebenen die Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in diese setzen sich die Andreaskreuze.

e) Achtseitige Turmpyramide. Bei dieser sind verschiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zur Auflagerebene hinabgehen lassen und die 4 zwischen diesen liegenden Grate auf Giebelspitzen setzen lassen (Fig. 378); endlich kann man von den 8 Graten im untersten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zusammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen sind nur 4 Auflagere vorhanden; die Überführung vom Viereck in das Achteck ist besonders zu untersuchen.

a) Achtseitige Turmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 375 zeigt diese Lösung, wobei der größeren Allgemeinheit halber unter die achtseitige Pyramide noch eine vierseitige, ein Stockwerk hohe, abgestumpfte Pyramide ($ABCD1234$) gesetzt ist. Dieselbe kann man auch fortlassen; alsdann sind $1, 2, 3, 4$ die Auflagere. Da dieses untere Stockwerk nach vorstehendem geometrisch und statisch bestimmt ist, so bleibt das Ganze ebenso, falls der hinzukommende, oberhalb 1234 befindliche Teil geometrisch und statisch bestimmt ist. Die zu führende Untersuchung gilt also auch für den in 1234 aufgelagerten

¹⁷⁸⁾ Das vorstehend angewendete Verfahren, welches stets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, ist angegeben in: MÜLLER-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.

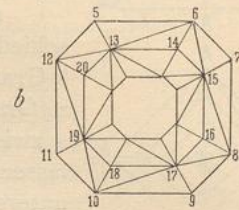
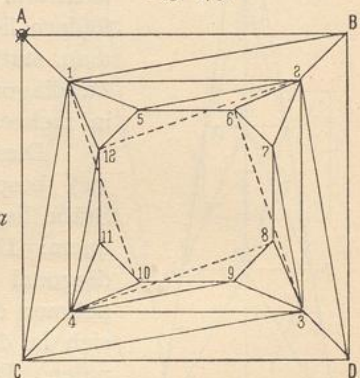
124.
Achtseitige
Turm-
pyramide
mit 4 Lager-
punkten.

Turm. Das achtseitige Turmdach soll nunmehr aus dem Unterbau dadurch entwickelt werden, daß jeder neue Knotenpunkt durch drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knotenpunkte angeschlossen wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen dürfen. Punkt 12 ist mit 1, 4, 2 verbunden. Die Stäbe 12 1 und 12 4 liegen in begrenzenden Ebenen, 12 2 aber nicht. Ferner sind angegliedert: Punkt 5 an 12, 1, 2, Punkt 6 an 2, 5, 3 und so weiter. Die weiteren Stockwerke ergeben sich einfach; sie sind der größeren Deutlichkeit halber in einer besonderen Abbildung (Fig. 375 *b*) gezeichnet. Bei diesen liegen alle Stäbe in den begrenzenden Ebenen; das Innere bleibt frei. In Fig. 375 *a* sind 16 Knotenpunkte und 40 Stäbe, also thatsächlich

$$s = 3k - 8.$$

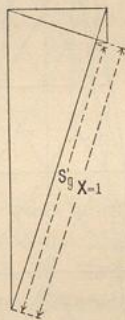
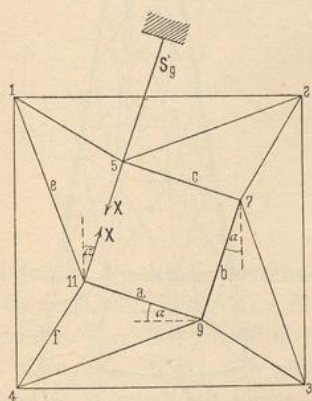
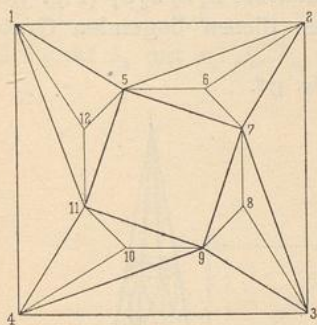
Die vier in Fig. 375 *a* punktierten Stäbe (12 2, 6 3, 8 4, 10 1), welche weder in Seitenflächen der Pyramiden noch in wagrechten Ebenen liegen, sind un-
bequem; man kann sie vermeiden. Man lege das tiefstliegende Achteck (5 6 7 8 9 10 11 12) gegen den unteren vierseitigen Teil geometrisch fest, indem man die Punkte 1, 2, 3, 4 als feste Punkte betrachtet (was sie ja sind) und die 8 hinzukommenden Knotenpunkte durch $3 \cdot 8 = 24$ Stäbe anschließt. Dabei sind verschiedene Stabanordnungen möglich; eine solche ist in Fig. 376 angegeben. Man verbinde zunächst Punkt 5 durch Stab 5 1 und 5 2 mit bezw. 1 und 2; alsdann fehlt zunächst für die Bestimmung von 5 noch ein Stab, was vorläufig bemerkt werde. Nunmehr betrachte man, vorbehaltlich späteren Nachtrages, Punkt 5 als fest, verbinde Punkt 7 mit 5, 2, 3, Punkt 9 mit 7, 3, 4 und Punkt 11 mit 9, 4, 1. Punkt 6 kann man nun mit 5, 7, 2, Punkt 8 mit 7, 3, 9, Punkt 10 mit 11, 9, 4 und Punkt 12 mit 5, 11, 1 verbinden. Die Verbindungsstäbe der 4 letztgenannten Punkte können für die vorläufige Betrachtung fortgelassen werden, da das ganze Fachwerk stabil ist, wenn es ohne diese 12 Stäbe stabil ist. Nunmehr fehlt noch ein Stab, da Punkt 5 nur mit 2 festen Punkten durch Stäbe verbunden war; es möge nun Stab 5 11 hinzugefügt werden; das Fachwerk hat dann die vorgeschriebene Zahl von Stäben. Wird nur das Fachwerk ohne die Knotenpunkte 6, 8, 10, 12 betrachtet, so sind 4 Knotenpunkte und 12 Stäbe hinzugekommen. Ergiebt sich bei beliebiger Belastung für die Spannung des Stabes 11 5 ein reeller Wert, so ist das Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt. Um diese Untersuchung zu führen, werde der Stab 11 5 herausgenommen und durch die darin herrschende, unbekannte Spannung X ersetzt; da aber dann ein Stab fehlt, wird ein Ersatzstab S_g' angebracht, der, in der wagrechten Ebene liegend, nach einem festen Punkte geführt werde. In Fig. 376 ist der feste Punkt durch Schraffierung angedeutet. Nun wirke in Knotenpunkt 11 eine beliebige äußere Kraft P in beliebiger Richtung, außerdem X in der Richtung 11 5; erstere zerlegt sich in Punkt 11 nach den Richtungen der jetzt hier noch vorhandenen Stäbe (11 1, 11 4, 11 9); diese Spannungen sind leicht zu ermitteln und können

Fig. 375.



als bekannt angenommen werden. Die in 11 1 und 11 4 wirkenden Kräfte gehen nach den festen Punkten 1 und 4 ; die Spannung in 11 9 zerlegt sich in Punkt 9 gleichfalls nach den Richtungen der dort zusammentreffenden 3 Stäbe, von welchen zwei nach den festen Punkten 4 und 3 gehen und diejenige in 9 7 nach Punkt 7 geht. So geht die Zerlegung weiter; die Spannung in 7 5 zerlegt sich in Punkt 5 nach den drei Stabrichtungen 5 1 , 5 2 und S_g' . Alle diese Spannungen sind bestimmt und leicht zu finden. Wir bezeichnen sie mit \mathfrak{S} ; diejenige im Ersatzstab sei \mathfrak{S}_0 . Ausser der Kraft P wirken noch die beiden unbekanntenen Stabspannungen X in 11 , bzw. 5 . Die in Punkt 11 wirkende Kraft X erzeugt Spannungen, welche X -mal so groß sind, als diejenigen, welche durch die Kraft $X=1$ erzeugt werden würden. Wir nennen die letzteren σ und ermitteln dieselben. Die in Punkt 11

Fig. 376.



wagrecht wirkende Kraft $X=1$ zerlegt sich in zwei wagrechte Kräfte: in die Resultierende von den Spannungen der Stäbe e und f , welche mit e und f in derselben Ebene liegt, also, da sie auch wagrecht ist, parallel zur Linie 1 4 sein muß, und in die Spannung a des Stabes a . Man sieht leicht, daß

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

ist; a ist Druck, also

$$a = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Überlegt man in gleicher Weise, daß a am Punkte 9 sich ganz ähnlich zerlegt, so erhält man (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 376):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha \text{ und } b = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

b ist Zug. Weiter erhält man $c = -\operatorname{tg}^3 \alpha$ und $d = -\operatorname{tg}^4 \alpha$; d bedeutet die Spannung, welche im Ersatzstabe durch die im Punkte 11 wirkende Einzelkraft $X=1$ erzeugt wird.

Die im Punkte 5 wirkende Einzelkraft $X=1$ ruft im Ersatzstabe die Zugspannung 1 hervor; beide Kräfte $X=1$, welche in den Punkten 5 und 11 wirken, erzeugen demnach zusammen im Ersatzstabe die Summenspannung $\sigma = 1 - \operatorname{tg}^4 \alpha$; die gesamte im Ersatzstabe durch beide Kräfte X und durch P erzeugte Spannung ist demnach

$$S = \mathfrak{S}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4 \alpha) X.$$

Da aber die Spannung im Ersatzstabe gleich Null sein muß — derselbe ist ja nicht vorhanden —, so lautet die Bedingungsgleichung für X :

$$0 = \mathfrak{S}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4 \alpha) X \text{ oder } X = -\frac{\mathfrak{S}_0}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}.$$

X wird ∞ , wenn $1 - \operatorname{tg}^4 \alpha = 0$, d. h. wenn $\alpha = 45$ Grad ist. Auch für Winkel, deren Größe nahe an 45 Grad liegt, ist die Konstruktion nicht zu empfehlen. Für

Winkelwerte von α , welche von 45 Grad stark abweichen, ist die Konstruktion ausführbar. — Auf dem Achteck $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 22$ (Fig. 375a, bzw. 376) kann nun der weitere Aufbau vorgenommen werden. — Nicht brauchbar ist nach vorstehendem beispielsweise der Aufbau nach Fig. 377, bei welchem die Eckpunkte des oberen Quadrats den Mitten des unteren Quadrats entsprechenden und $\alpha = 45$ Grad ist.

125.
Achtseitige
Turm-
pyramide
mit vier
Gratsparren
auf
Giebelspitzen.

Eine andere Lösung, die achtseitige Pyramide auf nur vier Auflager zu setzen, wird unter Benutzung von vier Giebeldreiecken im untersten Stockwerk des Turmes erhalten; diese Turmkonstruktion ist vielfach von Otzen ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrats $a_1 a_2 a_3 a_4$ (Fig. 378)

gehen vier Gratsparren hinab, während die zwischen diesen liegenden Gratsparren sich auf die Spitzen b_1, b_2, b_3, b_4 von vier Giebeldreiecken setzen, also ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als die erstgenannten Gratsparren. Von den Spitzen der Giebeldreiecke werden die Spannungen der Gratsparren durch Stäbe in die vier Auflagerpunkte der anderen Sparren geführt. Die Hauptauflager sind a_1, a_2, a_3, a_4 ; die Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 kann man als Giebelaullager ansehen. Damit die Giebelspitzen nicht durch die wagrechten Seitenkräfte der Sparrendrücke aus den lotrechten Ebenen herausgeschoben werden, sind in der Höhe derselben vier radiale Balken ($b_1 b_3, b_2 b_4, b_5 b_7, b_6 b_8$) angeordnet, welche im Verein mit dem umlaufenden Ringe $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8$ eine Scheibe bilden. Es fragt sich, ob dieser Unterbau der achtseitigen Turmpyramide geometrisch bestimmt ist. Ergiebt sich die geometrische Bestimmtheit des Unterbaues, so kann man auf demselben weiter in der oben angegebenen Weise aufbauen, indem man stets einen neuen Knotenpunkt durch drei neue

Fig. 377.

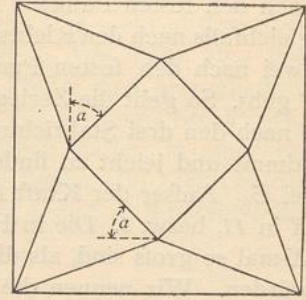
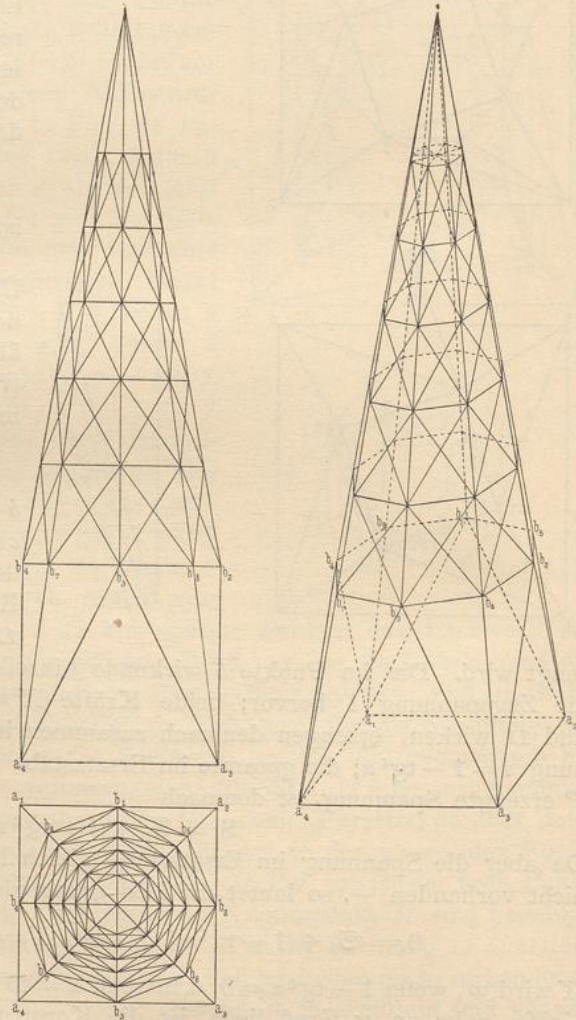


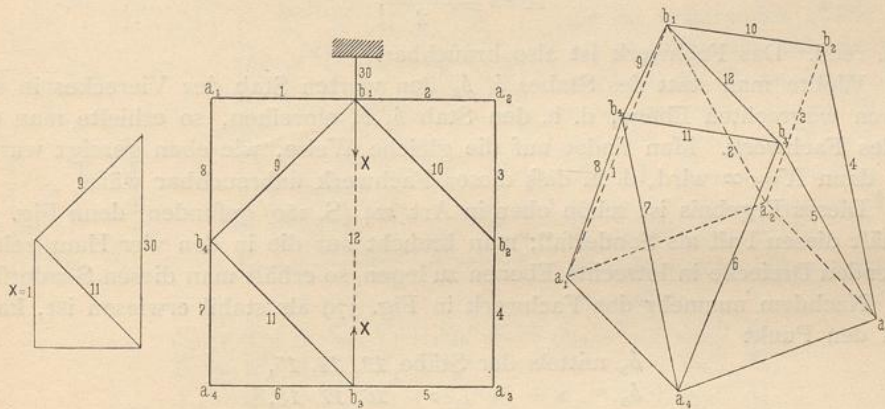
Fig. 378.



Stäbe an drei vorhandene Knotenpunkte anschliesst, welche mit dem neuen nicht in derselben Ebene liegen.

Im untersten Stockwerk sind vier Punktauflager vorhanden, nämlich a_1, a_2, a_3, a_4 , also $n = 3 \cdot 4 = 12$ Auflagerunbekannte. Knotenpunkte sind in der Aufлагerebene 4, in der durch die Giebelspitzen gelegten Ebene 8, also zusammen $k = 12$ vorhanden. Die Zahl der Stäbe muß demnach $s = 3k - n$ und $s = 3 \cdot 12 - 12 = 24$ sein. Vorhanden sind: 8 Stäbe der Giebeldreiecke, 8 Stäbe des Ringes $b_1 \dots b_8$, 4 Gratsparren und 4 in der Ebene der Giebelspitzen angeordnete einander kreuzende Balken; die Zahl der Stäbe stimmt also. Es ist zu untersuchen, ob die Anordnung derselben das Fachwerk geometrisch und statisch bestimmt macht. Wir bauen das Fachwerk wieder von unten auf (Fig. 379). a_1, a_2, a_3, a_4 sind die 4 festen Punkte, von denen ausgegangen wird; Punkt b_1 wird mit a_1 und a_2 verbunden; zunächst fehlt noch ein Stab, was im Gedächtnis behalten wird; Punkt b_4 wird mit a_1, a_4, b_1 , Punkt b_3 mit a_4, a_3, b_4 und Punkt b_2 mit a_2, a_3, b_1 verbunden. Nun fehlt noch ein Stab, da b_1 nur mit

Fig. 379.



zwei festen Punkten verbunden war. Fügt man den Stab $b_1 b_3$ ein, so entspricht die Gesamtzahl der Stäbe für das so konstruierte Fachwerk der statischen und geometrischen Bestimmtheit; ob auch die Anordnung richtig ist, wird mittels des oben vorgeführten Verfahrens des Ersatzstabes untersucht. An Stelle des Stabes $b_1 b_3$ wird ein Ersatzstab 30 (Fig. 379) eingeführt, welcher das Fachwerk unzweifelhaft geometrisch und statisch bestimmt macht. Soll dieser Stab durch Stab 12 überflüssig werden, so muß seine Spannung bei beliebiger Belastung des Fachwerkes gleich Null sein, ohne daß im Stabe 12 eine unendlich große Spannung entsteht. Bezeichnet man die Spannung des Stabes 12 für beliebige Belastung des Fachwerkes mit X , so erzeugen die beiden Kräfte X , welche von Stab 12 in den Punkten b_1 , bzw. b_3 auf das Fachwerk ausgeübt werden, in Stab 30 die Spannung $X \mathfrak{S}_{30}'$, in welchem Ausdruck \mathfrak{S}_{30}' die Spannung ist, welche durch $X=1$ im Stabe 30 erzeugt wird. Nennt man ferner die Spannung, welche durch irgend eine beliebige Belastung des Fachwerkes ohne den Stab 12, aber mit Stab 30 in diesem letzteren Stabe hervorgerufen wird, \mathfrak{S}_{030} , so ist die gesamte bei dieser Belastung im Stabe 30 auftretende Spannung

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{030} + \mathfrak{S}_{30}' X.$$

$X=1$ zerlegt sich im Punkte b_3 in eine Seitenkraft parallel zu $a_1 a_3$ und eine in die Stabrichtung 11 fallende Kraft; es ist

$$\mathfrak{S}_{11}' = -\frac{1}{\cos \alpha}.$$

α ist der Winkel des Stabes 11 mit $b_1 b_3$, hier = 45 Grad. \mathfrak{S}_{11}' zerlegt sich in b_4 weiter nach der Richtung des Stabes 9 und nach der Parallelen zu $a_1 a_4$; \mathfrak{S}_9' im Punkte b_1 nach der Richtung parallel zu $a_1 a_2$ und der Richtung von Stab 30. Die Spannung \mathfrak{S}_{10}' ist Null, weil in b_2 keine Kraft von Stab 10 übertragen werden kann. Durch $X=1$ im Punkt b_3 und $X=1$ im Punkt b_1 wird demnach (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 379)

$$\mathfrak{S}_{30}' = 1 + 1 = 2$$

erzeugt; demnach ist

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{0\ 30} + 2 X.$$

Der Ersatzstab 30 ist überflüssig, d. h. die Konstruktion ohne ihn ausreichend, wenn für beliebige Belastung die Spannung S_{30} gleich Null ist, dabei aber X einen reellen Wert hat. Für $S_{30} = 0$ wird

$$X = -\frac{\mathfrak{S}_{0\ 30}}{2},$$

d. h. reell. Das Fachwerk ist also brauchbar.

Wollte man statt des Stabes $b_1 b_3$ den vierten Stab des Viereckes in der oberen wagrechten Ebene, d. h. den Stab $b_2 b_3$ einreihen, so erhielte man ein labiles Fachwerk. Man findet auf die gleiche Weise, wie eben gezeigt wurde, daß dann $X = \infty$ wird, d. h. daß dieses Fachwerk unbrauchbar wäre.

Dieses Ergebnis ist schon oben in Art. 124 (S. 160) gefunden; denn Fig. 377 enthält diesen Fall als Sonderfall; man braucht nur die in den vier Hauptseiten liegenden Dreiecke in lotrechte Ebenen zu legen, so erhält man diesen Sonderfall.

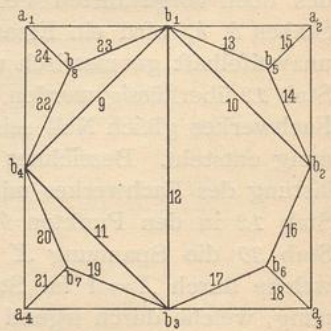
Nachdem nunmehr das Fachwerk in Fig. 379 als stabil erwiesen ist, kann man den Punkt

b_5	mittels der Stäbe 13, 14, 15,
b_6	» » » 16, 17, 18,
b_7	» » » 19, 20, 21,
b_8	» » » 22, 22, 24

festlegen (Fig. 380). Man sieht, daß dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist. Fügt man Stab $b_2 b_3$ ein, so wird das Fachwerk statisch unbestimmt, aber nicht labil. Bei eisernen Türmen kann man diesen Stab an einer Seite mit länglichen Schraubenlöchern befestigen, so daß er für die Berechnung als nicht vorhanden angesehen werden kann. Nun kann man weiter in bekannter Weise aufbauen. In Fig. 378 (S. 160) ist dieser Aufbau gezeichnet, dabei aber jedes Seitenfeld mit zwei gekreuzten Diagonalen versehen, welche als Gegendiagonalen wirken. Die Konstruktion ist, abgesehen von der Spitze, statisch bestimmt. In der isometrischen Ansicht von Fig. 378 sind der größeren Deutlichkeit wegen die Stäbe 9, 10, 11, 12 weggelassen.

Nachdem die Stabilität von Fig. 380 nachgewiesen ist, bleibt zu untersuchen, ob das Fachwerk stabil bleibt, wenn Stab 11 durch $b_5 b_7$, d. h. durch 31,

Fig. 380.



Stab 9 durch $b_6 b_8$, d. h. durch 32, Stab 10 durch $b_2 b_4$, d. h. durch 33, und Stab 30 durch $b_1 b_3$, d. h. durch 12 ersetzt werden (Fig. 381).

Der Gang der Untersuchung ist folgender. Jeder neu einzuführende Stab überträgt in seinen Anschlußknotenpunkten noch unbekannte Kräfte X auf dieselben und erzeugt in den zu ersetzenden Stäben Spannungen, welche den Kräften X proportional sind. In den Stäben 31, 32, 33, 12 (Fig. 381) mögen die Spannungen X_1, X_2, X_3, X_4 wirken, welche in dem zu ersetzenden Stabe 11 die Spannungen

$$S_{11}' X_1, S_{11}'' X_2, S_{11}''' X_3, S_{11}'''' X_4$$

und im Stabe 9 die Spannungen

$$S_9' X_1, S_9'' X_2, S_9''' X_3, S_9'''' X_4 \text{ u. s. w.}$$

erzeugen mögen. Die sonst noch vorhandenen äußeren Lasten rufen in den Stäben die Spannungen \mathfrak{S} hervor, d. h. in den Stäben 9, 10, 11, 30 die Spannungen $\mathfrak{S}_9, \mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{30}$. Die Spannungen \mathfrak{S} würden allein vorhanden sein, wenn die Stäbe 31, 32, 33, 12 nicht und nur die zu ersetzenden Stäbe 9, 10, 11, 30 vorhanden wären. Offenbar sind die S^i die durch $X_1 = 1$ erzeugten Spannungen, S^i , bzw. S^{ii} , S^{iii} die durch $X_2 = 1$, bzw. $X_3 = 1, X_4 = 1$ erzeugten Spannungen. Die gesamten in den zu ersetzenden Stäben 9, 10, 11, 30 auftretenden Spannungen sind nunmehr

$$\begin{aligned} S_{30} &= \mathfrak{S}_{30} + S_{30}' X_1 + S_{30}'' X_2 + S_{30}''' X_3 + S_{30}'''' X_4, \\ S_9 &= \mathfrak{S}_9 + S_9' X_1 + S_9'' X_2 + S_9''' X_3 + S_9'''' X_4, \\ S_{10} &= \mathfrak{S}_{10} + S_{10}' X_1 + S_{10}'' X_2 + S_{10}''' X_3 + S_{10}'''' X_4, \\ S_{11} &= \mathfrak{S}_{11} + S_{11}' X_1 + S_{11}'' X_2 + S_{11}''' X_3 + S_{11}'''' X_4. \end{aligned}$$

Sollen die Stäbe 9, 10, 11, 30 ersetzbar sein, so müssen die Spannungen dieser Stäbe den Wert Null haben, ohne daß dadurch diejenigen in den ersetzenden Stäben X_1, X_2, X_3, X_4 unendlich groß werden. Die Bedingungsgleichungen für die Werte von X_1, X_2, X_3, X_4 sind demnach:

$$S_{30} = S_9 = S_{10} = S_{11} = \text{Null},$$

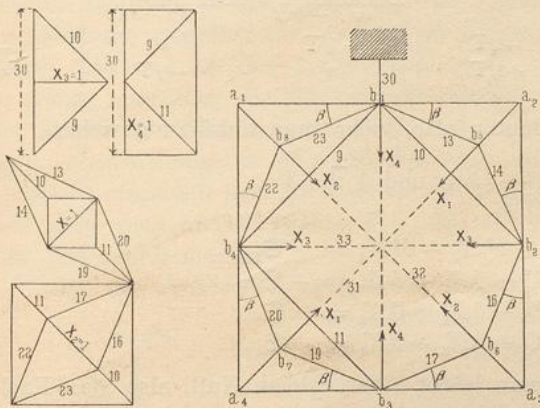
d. h.

$$\begin{aligned} X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_3 S_{30}''' + X_4 S_{30}'''' &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1 S_9' + X_2 S_9'' + X_3 S_9''' + X_4 S_9'''' &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_3 S_{10}''' + X_4 S_{10}'''' &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ X_1 S_{11}' + X_2 S_{11}'' + X_3 S_{11}''' + X_4 S_{11}'''' &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Sollen X_1, X_2, X_3, X_4 reell sein, so darf die Nennerdeterminante vorstehender Gleichungen nicht gleich Null sein; wenn dies stattfindet, so ist das Fachwerk labil. Wendet man diese Überlegung auf das zu betrachtende Turmfachwerk an, und bringt in den betreffenden Knotenpunkten die Kräfte X_1, X_2, X_3, X_4 als äußere Kräfte an, so erhält man durch Zerlegung die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werte der Stabspannungen $S^i, S^{ii}, S^{iii}, S^{iiii}$, welche bezw. durch die Kräfte $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1$ erzeugt werden.

11*

Fig. 381.



Stäben die Spannungen \mathfrak{S} hervor, d. h. in den Stäben 9, 10, 11, 30 die Spannungen $\mathfrak{S}_9, \mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{30}$. Die Spannungen \mathfrak{S} würden allein vorhanden sein, wenn die Stäbe 31, 32, 33, 12 nicht und nur die zu ersetzenden Stäbe 9, 10, 11, 30 vorhanden wären. Offenbar sind die S^i die durch $X_1 = 1$ erzeugten Spannungen, S^i , bzw. S^{ii} , S^{iii} die durch $X_2 = 1$, bzw. $X_3 = 1, X_4 = 1$ erzeugten Spannungen. Die gesamten in den zu ersetzenden Stäben 9, 10, 11, 30 auftretenden Spannungen sind nunmehr

Tabelle der Spannungen, welche in den Fachwerkstäben erzeugt werden durch:

	in Stab 13	14	16	17	19	20
$X_1 = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$
$X_2 = 1$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	0	0
$X_3 = 1$	0	0	0	0	0	0
$X_4 = 1$	0	0	0	0	0	0

	Stab 22	23	9	10	11	30
$X_1 = 1$	0	0	$-\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$	$+\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$	$+\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$	0
$X_2 = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)}$	0	$+\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$	$+\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$	0
$X_3 = 1$	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	-2
$X_4 = 1$	0	0	$+\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	+2

Die Bedingungsgleichungen lauten also, wenn man abkürzungsweise

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} = a \text{ und } \sqrt{2} = b$$

setzt:

$$\begin{aligned} 0 X_1 + 0 X_2 - b^2 X_3 + b^2 X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a X_1 + 0 X_2 - b X_3 + b X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a X_1 + a X_2 - b X_3 + 0 X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ a X_1 + a X_2 + 0 X_3 - b X_4 &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante ist, wie man leicht sieht, gleich Null, also das Fachwerk labil.

Wenn aber der Stab 11 im Fachwerk belassen und davon abgesehen wird, Stab 11 durch Stab 33 zu ersetzen, so erhält man ein stabiles Fachwerk. Als dann lauten die Gleichungen, da nunmehr X_3 gleich Null ist:

$$\begin{aligned} X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_4 S_{30}''' &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1 S_9' + X_2 S_9'' + X_4 S_9''' &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_4 S_{10}''' &= -\mathfrak{S}_{10}, \end{aligned}$$

Mit den Werten obiger Tabelle heißen diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 X_1 + 0 X_2 + b^2 X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a X_1 + 0 X_2 + b X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a X_1 + a X_2 + 0 X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante dieser Gleichungen hat den Wert:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ -a & 0 & b \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = -b^2 a^2 = -2 \frac{\sin^2 \beta}{(\cos \beta - \sin \beta)^2}.$$

Das in Fig. 382 dargestellte Fachwerk ist also stabil, falls nicht β gleich Null ist. Dieser Wert ist ausgeschlossen, ebenso der Wert $\beta = 45$ Grad, für den $a = \infty$ würde; aber auch Winkelwerte von β , welche sich dem Nullwerte nähern, sollten vermieden werden.

Die meist übliche Anordnung mit vier in der Ebene $b_1 b_2 b_3 b_4$ einander kreuzenden Stäben ist dagegen nach vorstehender Entwicklung nicht stabil; wenn

Fig. 382.

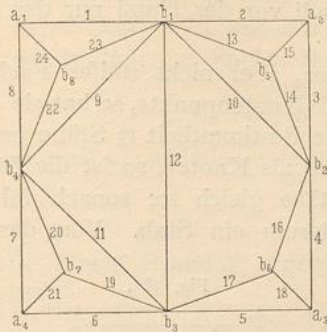
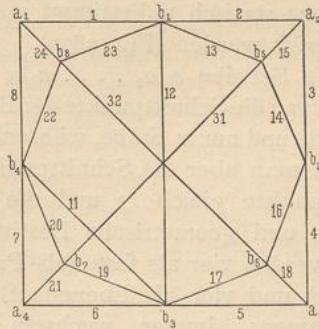


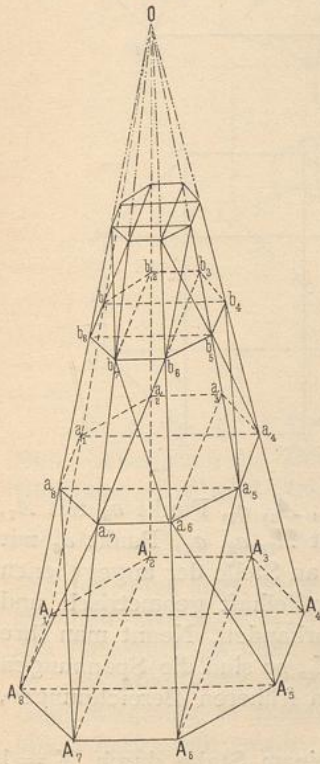
Fig. 383.



dieselbe trotzdem in der Praxis zu Aussetzungen bislang unseres Wissens keine Veranlassung gegeben hat, so liegt dies darin, daß die Verbindungen nicht gelenkig sind und an den Knotenpunkten Momente übertragen werden können. So wenig man aber die Hängewerke mit für die statische Bestimmtheit fehlenden Stäben als eine in jeder Beziehung befriedigende Stabanordnung erklären kann, ebensowenig ist dies mit der hier angegebenen Konstruktion der Fall. Vielleicht empfiehlt sich am meisten das in Fig. 382 dargestellte Fachwerk. Eventuell ziehe man auch den Stab $b_2 b_3$ ein, der das Fachwerk statisch unbestimmt, aber nicht labil macht.

Auf das Achteck $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8$ kann man nun die weitere Turm-

Fig. 384.



konstruktion aufbauen, wie in Art. 124 (Fig. 375 b) angegeben ist, indem man nach und nach stets einen Knotenpunkt und drei Stäbe hinzufügt. Besonders werde bemerkt, daß in den wagrechten Trennungsebenen der oberen Geschosse nunmehr nur noch die achteckigen Ringe angeordnet zu werden brauchen. Das Raumfachwerk ist mit diesen stabil.

b) Achtseitige Turmpyramide mit acht Lagerpunkten. Hier ist zunächst die Moller'sche Turmpyramide (Fig. 384) zu betrachten. Alle acht Gratsparren sind bis zur gemeinsamen Auflagerebene hinabgeführt; zwischen je zwei Stockwerken sind herumlaufende Ringe angeordnet und in jedem Stockwerk vier Seitenfelder mit gekreuzten Stäben derart versehen, daß stets nur ein Feld um das andere ein solches Anderskreuz hat; diese verkreuzten Felder wechseln in den verschiedenen Stockwerken. Außerdem sind in den vier geneigten Ebenen $A_1 A_4 O$, $A_3 A_5 O$, $A_2 A_7 O$ und $A_3 A_6 O$ quer durchlaufende Balken, d. h. für das Stabsystem Stäbe $a_1 a_4$, $a_8 a_5$, $a_2 a_7$, $a_3 a_6$, bzw. $b_1 b_4$, $b_8 b_5$, $b_2 b_7$, $b_3 b_6$ vorhanden. In Fig. 384 bezeichnet O die Spitze der Turmpyramide. Demnach ergibt sich zwischen je zwei Stockwerken eine Figur, wie in Fig. 385 b dargestellt ist. Nunmehr soll untersucht werden, ob dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt

126.
Moller'sche
Turm-
pyramide.

ist, wobei zunächst, wie bisher stets, von der Spitze abgesehen werden soll, welche das Ganze statisch unbestimmt macht; ferner soll vor der Hand nur der Unter- teil geprüft werden (Fig. 385a).

Die Scheibe $a_1 a_2 \dots a_7 a_8$ ist ein ebenes, aber nicht steifes Fachwerk; rechnet man die Schnittpunkte der Balken nicht als Knotenpunkte, so hat sie 8 Knotenpunkte und nur 12 Stäbe, während die statische Bestimmtheit 13 Stäbe verlangt. Rechnet man aber die Schnittpunkte der Balken als Knoten, so ist die Zahl der Knotenpunkte gleich 12 und die Zahl der Stäbe gleich 20; sonach fehlt für statische und geometrische Bestimmtheit wiederum ein Stab. Von den Auflagern werden vier als feste (als Punktauflager) und vier als Ebenenauflager angenommen; immer wechseln ein Punkt- und ein Ebenenauflager ab. Die vier Querbalken in der Auflagerebene sind dann, wenn ein Ring in derselben angeordnet wird, für die geometrische Bestimmtheit überflüssig und sollen als nicht vorhanden angesehen werden. Die Anzahl der Knotenpunkte des untersten Stockwerkes ist $k = 16$, die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 4 \cdot 3 + 4 = 16$ und diejenige der Stäbe $s = 36$; für geometrische und statische Bestimmtheit müßte $s^1 = 3k - n = 32$ sein; das betrachtete Raumfachwerk ist also vierfach statisch unbestimmt. Ordnet man aber statt der gekreuzten Stäbe in den vier Seitenfeldern einfache Stäbe an, so ist die erste Bedingung der statischen Bestimmtheit erfüllt.

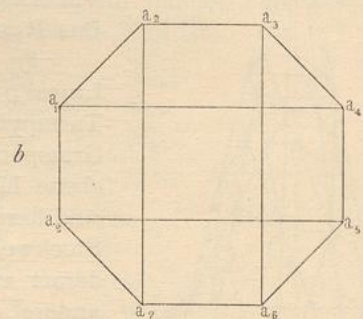
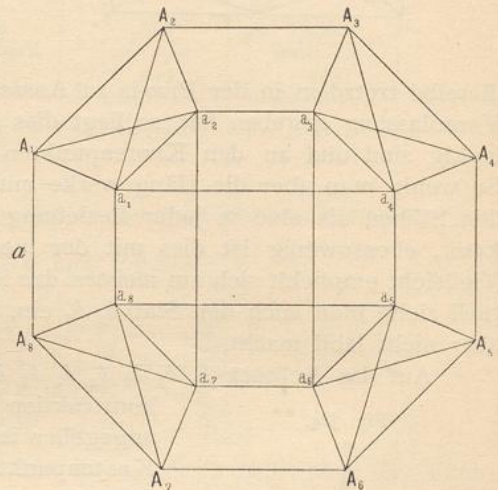
Dieses Fachwerk soll untersucht werden; es genügt, ein Stockwerk, etwa das unterste, zu betrachten. Baut man dasselbe (Fig. 386) auf den acht Auflagern $A_1 \dots A_8$ so auf, daß man jeden hinzukommenden Punkt mit drei bereits festen Punkten verbindet, so muß man wieder einige Ersatzstäbe — hier sind die Stäbe 25 und 26 gewählt — zu Hilfe nehmen. Verbunden sind: Punkt a_1 mit

A_1, A_2, C , Punkt a_4 mit A_3, A_4, a_1 , Punkt a_5 mit A_5, A_6, a_4 , Punkt a_8 mit A_7, A_8, a_5 ; ferner Punkt a_2 mit A_2, a_1, D , Punkt a_7 mit A_7, a_8, a_2 , Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7 , Punkt a_3 mit A_3, a_4, a_6 . In Wirklichkeit sind an Stelle der angegebenen Ersatzstäbe 25 und 26, welche das Fachwerk unzweifelhaft geometrisch und statisch bestimmt machen, die Stäbe $a_1 a_8$ und $a_2 a_3$ vorhanden. Nennt man ihre Spannungen bei beliebiger Belastung bezw. X_1 und X_2 , so sind die Spannungen in den einzelnen Stäben, nach Früherem und mit den früheren Bezeichnungen,

$$S = \mathfrak{C} + S' X_1 + S'' X_2.$$

S' ist die in einem Stabe durch $X_1 = 1$, S'' die in einem Stabe durch $X_2 = 1$

Fig. 385.



erzeugte Spannung. In den Ersatzstäben müssen für beliebige Belastung die Spannungen $S=0$ werden, wenn dieselben überflüssig sein sollen; die X_1 und X_2 dürfen dabei aber nicht unendlich groß werden. Mithin ist die Bedingung für die Standfähigkeit des Fachwerkes: die Nennerdeterminante der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} S_{25}' X_1 + S_{25}'' X_2 &= -\mathfrak{E}_{25}' \\ S_{26}' X_1 + S_{26}'' X_2 &= -\mathfrak{E}_{26}' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10.$$

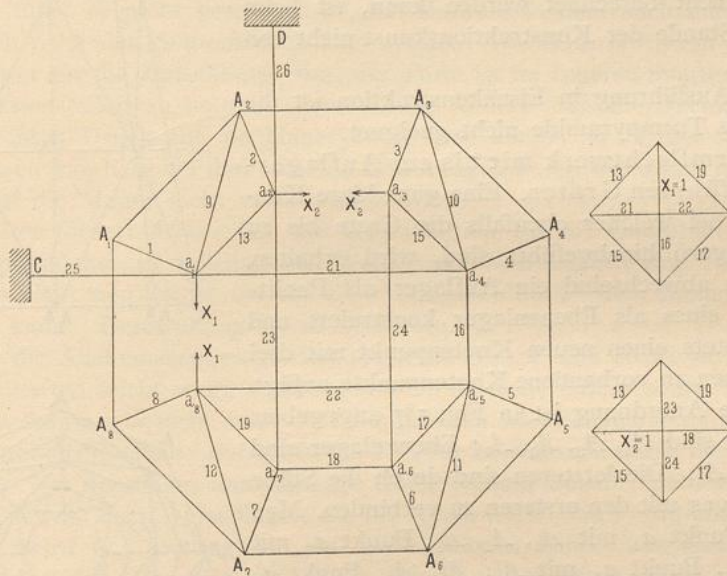
mufs von Null verschieden sein, d. h.

$$\left\{ \begin{aligned} S_{25}' \cdot S_{25}'' &> 0 \\ S_{26}' \cdot S_{26}'' &< 0 \end{aligned} \right\}$$

Die Werte S' und S'' ergeben sich leicht aus den Kräfteplänen in Fig. 386. Man erhält:

$$\begin{aligned} S_{22}' &= -1, & S_{16}' &= +1, & S_{21}' &= -1, \\ S_{25}' &= 0, & S_{26}' &= 0, \\ S_{24}'' &= -1, & S_{18}'' &= +1, & S_{22}'' &= 0, \\ S_{23}'' &= -1, & S_{26}'' &= 0, & S_{16}'' &= 0 = S_{21}'', \\ \mathfrak{E}_{25}'' &= 0. \end{aligned}$$

Fig. 386.



Da $S_{25}' = S_{26}' = S_{25}'' = S_{26}'' = 0$ sind, so ist die Nennerdeterminante gleich Null. Aber auch die Zählerdeterminante in den Ausdrücken für X_1 und X_2 der Gleichungen 10 wird gleich Null; mithin erhält man sowohl für X_1 , wie für X_2 zunächst den Wert $\frac{0}{0}$, also einen unbestimmten Wert, der auch endlich sein kann. Dividiert man aber beide Gleichungen 10 durch $S_{25}' = S_{25}'' = S_{26}' = S_{26}''$, so sieht man, daß sich $X_1 = X_2 = \infty$ ergibt. Sonach dürfen die Ersatzstäbe nicht fehlen; das Fachwerk ist ohne dieselben labil.

Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob nicht durch Einziehen einer Gegendiagonale in eines der bereits mit Diagonalen versehenen Felder die Stabilität hergestellt würde. Versieht man etwa Feld $A_1 A_2 a_2 a_1$ mit einer zweiten

Diagonale, so wird zunächst die Gesamtzahl der Stäbe um einen Stab größer, als mit der statischen Bestimmtheit vereinbar ist; aber stabil wird das Fachwerk dadurch nicht. Denn in der Ebene dieses Feldes liegen die Punkte desselben Diagonale nur überbestimmt; das Verhältnis dieser Scheibe gegen das übrige Fachwerk aber, also für etwaige Drehungen derselben um die Achse $A_1 A_2$, bleibt vollständig unverändert. War sonach das frühere Fachwerk labil, so ist es auch das Fachwerk nach Einziehen der Gegendiagonale. Das Gleiche gilt von den anderen drei Gegendiagonalen, welche möglich und üblich sind. Das Fachwerk ist also auch mit den Gegendiagonalen eine labile Konstruktion.

Ob man unter diesen Verhältnissen weiterhin empfehlen kann, Turmdächer nach *Moller'scher* Konstruktion auszuführen, ist fraglich. Dieselben haben sich allerdings bisher gut gehalten; aber eine als nicht stabil erkannte Konstruktion, die überdies nicht berechnet werden kann, ist beim heutigen Stande der Konstruktionskunst nicht voll berechtigt.

Für Ausführung in Eisenkonstruktion ist die *Moller'sche* Turmpyramide nicht geeignet.

127.
Turm-
flechtwerk
mit bis zur
Auflagerebene
geführten
Graten.

c) Turmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten. Eine ganz klare Konstruktion, bei welcher ebenfalls die Grate bis zu den Auflagern hinabgeführt sind, wird erhalten, wenn man abwechselnd ein Auflager als Punktlager und eines als Ebenenlager konstruiert und nunmehr stets einen neuen Knotenpunkt mit drei neuen Stäben an vorhandene Knotenpunkte anfügt. Eine solche Anordnung ist in Fig. 387 angegeben. Punktlager sind A_1, A_3, A_5, A_7 ; Ebenenlager sind A_2, A_4, A_6, A_8 . Die letzteren sind durch die Stäbe des Fußringes mit den ersteren zu verbinden. Man verbinde Punkt a_1 mit A_1, A_2, A_3 , Punkt a_3 mit A_2, A_3, A_4 , Punkt a_5 mit A_4, A_5, A_6 , Punkt a_7 mit A_6, A_7, A_8 ; alsdann sind a_1, a_3, a_5, a_7 als feste Punkte anzusehen. Nun verbinde man Punkt a_2 mit A_2, a_1, a_3 , Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_5 , Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7 , Punkt a_8 mit A_8, a_7, a_1 . In solcher Weise kann man weiter bauen und erhält, abgesehen von der Spitze, ein statisch bestimmtes Raumfachwerk. Dasselbe kann in Holz (zweckmäßig mit eisernen Diagonalen in den Seitenflächen) ohne Schwierigkeit hergestellt werden.

2) Konstruktion der hölzernen Turmhelme.

128.
Grundsätze.

Für die Konstruktion der hölzernen Türme hat *Moller*¹⁷⁹⁾ vor mehr als einem halben Jahrhundert Grundsätze aufgestellt, welche zum großen Teile auch

¹⁷⁹⁾ A. a. O., Heft 4.

Fig. 387.

