Die Konstruktionen in Holz

Warth, Otto

Leipzig, 1900

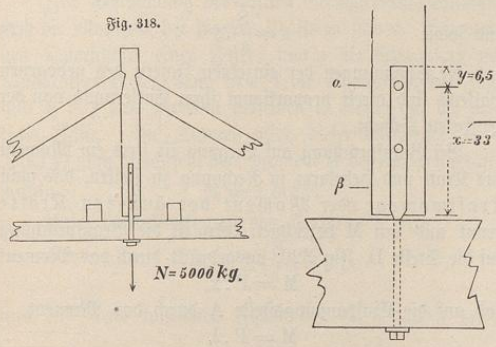
§ 4. Biegungsfestigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-77962

Für Schmiedeeisen (Bolzen und dergl.) ist $S = 600$ kg anzunehmen.

Beispiel: Eine Hängesäule aus Tannenholz werde nach Fig. 318 u. 319 durch Flacheisenbänder und Bolzen mit dem Tramen verbunden; die Verbindung ist in allen Teilen zu berechnen, unter Annahme einer Zugspannung $N = 5000$ kg, Fig. 318.

Fig. 318.



I. Stärke des Schraubenbolzens (Scherfestigkeit).

Der Bolzen wird mit zwei Querschnitten auf Abscherung beansprucht; ist der Durchmesser $= d$, dann wird (Formel 3):

$$N = 5000,\ S = 600,\ q = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot \frac{3{,}14\, d^2}{4}.$$

$$2 \cdot \frac{3{,}14\, d^2}{4} = \frac{5000}{600}.$$

$$d = 2{,}3 \text{ cm}.$$

II. Stärke der Eisenbänder (Zugfestigkeit).

Die Abmessungen an der durch das Bolzenloch geschwächten Stelle seien b und h; dann ist (Formel 1)

$$N = 5000,\ S = 750,\ q = 2\,bh$$

$$2\,bh = \frac{5000}{750}.$$

Nimmt man $h = 1$ cm, dann wird
$b = 3{,}3$ cm.

Die ganze Breite B wird

$$B = b + d = 3{,}3 + 2{,}3 = 5{,}6 \text{ cm}$$

d. i. $\sim$ 6 cm.

III. Entfernung x des Bolzens vom Ende der Hängesäule (Scherfestigkeit).

Der Bolzen sucht das zwischen ihm und dem Hängesäulenende stehende Holz auszuscheren; es ist (Formel 3):

$$N = 5000,\ S = 5,\ q = 2 \cdot 15\, x$$

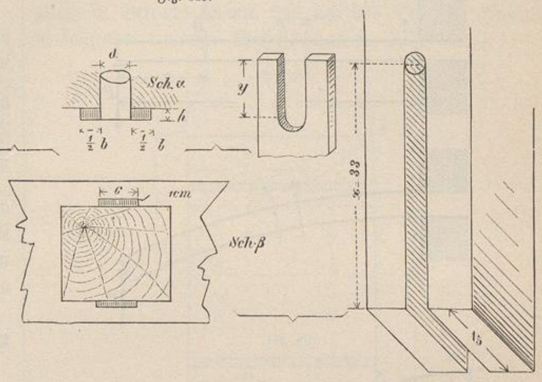
$$2 \cdot 15\, x = \frac{5000}{5}$$

$$x = 33 \text{ cm}.$$

IV. Entfernung y des Bolzens vom Ende des Eisenbandes (Scherfestigkeit).

Hier entstehen vier Abscherungsflächen, und es ist (Formel 3):

Fig. 319.



$$N = 5000,\ S = 600,\ q = 4 \cdot 1 \cdot y$$

$$4\,y = \frac{5000}{600}$$

und $y = 2{,}1$ cm.

Diese Entfernung ist für die Ausführung zu klein, und es ist zu wählen

y min $= 2{,}5\, d$ oder besser $= 3\, d$

mithin $y = 3 \cdot 2{,}3 \text{ cm} = \sim 7$ cm.

§ 4.

Biegungsfestigkeit.

Wird ein wagrecht liegender Balken an einem Ende fest eingespannt und am freien Ende durch ein Gewicht P belastet, so erfährt der Balken eine Biegung, die um so größer sein wird, je größer die freie Länge des Balkens und je größer die Belastung ist, Fig. 320.

Infolge der Biegung erfahren die einzelnen Fasern des Balkens eine Längenänderung, derart, daß die oberhalb liegenden Fasern gezogen, „verlängert“, die unten liegenden zusammengedrückt, „verkürzt“ werden. Der Übergang aus der Zugspannung in die Druckspannung muß durch Null gehen, d. h. es muß eine mittlere Faserschicht vorhanden sein, die weder gezogen noch gedrückt, sondern nur gebogen wird, und welche die **neutrale Faserschicht** heißt. Der Schnitt 00 der neutralen Faserschicht mit jedem Querschnitt des Balkens heißt **die neutrale Achse** des Querschnittes.

Zwei sehr nahe bei einander liegende parallele und normal zur Balkenachse stehende Ebenen α und β werden sich nach eingetretener Biegung schneiden, Fig. 320, und die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern werden sich ergeben aus den Abschnitten zwischen den Linien β und β', wenn $\beta' \parallel \alpha$ durch D gezogen wird, da vor der Biegung die sämtlichen Fasern die Länge C D hatten, Fig. 321.

Fig. 320.

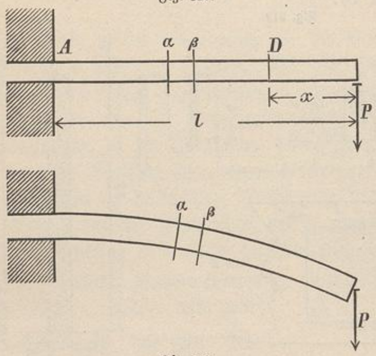


Fig. 321.

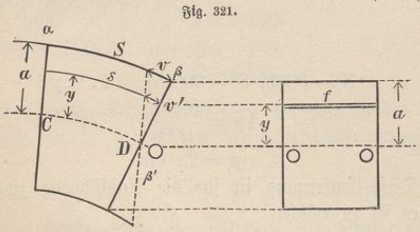
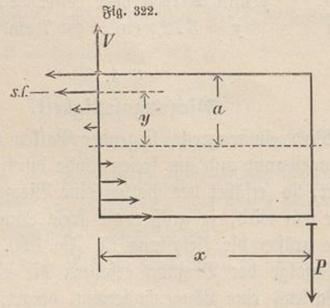


Fig. 322.



Die Verlängerung der äußersten Faser ist somit $= v$, diejenige der Faser in der Entfernung $y = v'$, und es ist

$$\frac{a}{y} = \frac{v}{v'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

d. h. die Verlängerungen, bezw. die Verkürzungen sind proportional der Entfernung von der neutralen Faser.

Die in den einzelnen Fasern auftretenden Zug- und Druckspannungen dürfen das zulässige Maß nicht überschreiten, so daß also in den am meisten beanspruchten äußersten Fasern höchstens die zulässige Beanspruchung S auftreten darf. Bezeichnet man die Beanspruchung pro Quadratcentimeter in der Entfernung y von der neutralen Schicht mit s, so ist, da sich die Längenänderungen innerhalb der Elastizitätsgrenze wie die Spannungen verhalten (s. Seite 99)

$$\frac{v}{v'} = \frac{S}{s}$$

und daher mit Berücksichtigung von Formel (4) auch

$$\frac{S}{s} = \frac{a}{y}$$

und somit

$$s = \frac{S}{a} \cdot y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

d. h. die Spannungen der einzelnen Fasern des gebogenen Balkens sind direkt proportional ihrer Entfernung von der neutralen Schicht.

Bei Beanspruchung auf Biegung ist stets ein Moment aus Kraft und Hebelarm in Rechnung zu stellen, das man Kraftmoment oder Moment der äußeren Kräfte nennt und mit M bezeichnet. So ist die Beanspruchung auf die Stelle D, Fig. 320, ausgedrückt durch das Moment

$$M = P \cdot x,$$

und auf die Einspannungsstelle A durch das Moment

$$M = P \cdot l,$$

das zugleich das größte Moment, das Maximal-Biegungs-Moment $= M_{max}$ darstellt, da für diesen Punkt der Hebelarm am größten ist.

Diese äußeren Momente erzeugen innere Momente, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten müssen.

Um diese zu berechnen, denkt man sich den Balken irgendwo in einer beliebigen Entfernung x vom Ende durchschnitten und bringt an den einzelnen Fasern die entsprechenden Zug- und Druckspannungen an, dann müssen für die Erhaltung des Gleichgewichtszustandes die folgenden drei Bedingungen erfüllt werden:

1) Die Summe der wagrecht wirkenden Kräfte muß Null sein, um ein Verschieben in wagrechtem Sinne zu vermeiden;
2) die Summe der lotrecht wirkenden Kräfte muß Null sein, um ein Verschieben in lotrechtem Sinne zu vermeiden;
3) die Summe der statischen Momente aller Kräfte auf eine beliebige Achse, mithin auch auf die neutrale Achse muß Null sein, um eine Drehung des Systems zu vermeiden, Fig. 322.

Die Bedingungsgleichung (1) erfordert, daß die Zugspannungen mit den entgegengesetzt wirkenden Druckspannungen im Gleichgewicht sind, was bekanntlich der Fall ist, wenn die neutrale Achse, die die beiden Spannungen trennt, die Schwerachse der Querschnittsfläche ist, woraus folgt, daß die neutrale Achse eines Querschnittes mit dessen wagrechter Schwerachse zusammenfällt.

Bei rechteckigem wie überhaupt symmetrischem Querschnitt liegt mithin die neutrale Achse in der Mitte.

Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung (2) muß an der Schnittstelle eine nach oben gerichtete Vertikalkraft V gleich der abwärts gerichteten P angebracht werden, Fig. 322; diese Kraft wirkt in den einzelnen Querschnitten auf Abscherung, ist bei der Berechnung jedoch nicht weiter zu berücksichtigen, da die nach der dritten Gleichgewichtsbedingung erhaltenen Querschnitte überreichlich genügen.

Zur Bestimmung der dritten Gleichgewichtsbedingung sind die Momente der inneren Kräfte zu bilden. Bedeutet f den Querschnitt einer Faser, und s die Spannung pro Quadratcentimeter, dann ist s . f die Spannkraft der Faser und s . f . y das Moment derselben in Bezug auf die neutrale Achse. Die Summe aller dieser Momente, d. h. $\Sigma (s\,f\,y)$ muß gleich sein dem Moment M der äußeren Kräfte, mithin

$$M = \Sigma (s\,f\,y).$$

Unter Berücksichtigung von Formel (5) wird

$$M = \Sigma \left(\frac{S}{a}\, y \,.\, f\, y\right)$$

und da $\frac{S}{a}$ als konstanter Faktor vor die Klammer gesetzt werden kann, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$M = \frac{S}{a}\, \Sigma (f\, y^2).$$

$\Sigma (f\,y^2)$ bedeutet: Man zerlege den Querschnitt in unendlich viele und unendlich kleine Flächenteilchen f, multipliziere jedes mit dem Quadrate seines Abstandes von der neutralen Achse und summiere alle diese Produkte.

Man setzt $\quad \Sigma (f\,y^2) = J$

und versteht hierunter das auf die neutrale Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes (äquatoriales Trägheitsmoment). Dann wird

$$M = \frac{S}{a} \,.\, J = S \,.\, \frac{J}{a}.$$

Der Ausdruck $\frac{J}{a}$, d. h. das Trägheitsmoment, dividiert durch die Entfernung a der äußersten Faser von der neutralen Achse, wird als Widerstandsmoment W des Querschnittes bezeichnet, und es lautet die Grundgleichung für die Biegungsbeanspruchung somit:

$$M = S\,W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und bei gegebenem Biegungsmoment, das erforderliche Widerstandsmoment des Querschnittes:

$$W = \frac{M}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Für M ist stets das größte Biegungsmoment, also M max, in Rechnung zu stellen, und da für die bei den Hochbauten zur Verwendung kommenden Nadelhölzer die zulässige Beanspruchung $S = 60$ kg/qcm anzunehmen ist, so nimmt die Gleichung (7) für Holzbalken die spezielle Form an:

$$W = 0{,}0166\; M\, max \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

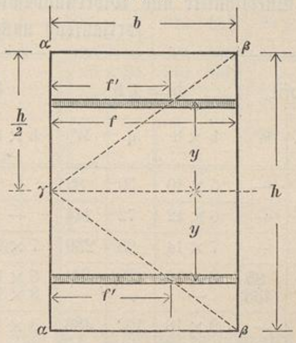
(da $\frac{1}{60} = 0{,}0166$ ist).

§ 5.

Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Für das Rechteck, das für die Holzkonstruktionen allein in Betracht kommt, läßt sich das Trägheitsmoment in folgender einfacher Weise bestimmen, Fig. 323:[1])

Fig. 323.



Es ist $\quad J = \Sigma (f\,y^2).$

Denkt man sich das Rechteck in unendlich schmale Flächenstreifen f parallel der neutralen Achse zerlegt, und bezeichnet den innerhalb des Dreieckes $\alpha\,\beta\,\gamma$ fallenden Teil desselben mit f′, so verhält sich:

$$f : f' = \frac{h}{2} : y$$

und hieraus $\quad f = \frac{f'\,h}{2\,y}$

mithin wird:

$$J = \Sigma \left(\frac{f'\,h}{2\,y} \,.\, y^2\right) = \Sigma \left(\frac{h}{2} \,.\, f'\,y\right) = \frac{h}{2}\, \Sigma (f'\,y).$$

$\Sigma (f'\,y)$ bedeutet die Summe der Produkte der einzelnen Flächenelemente f′, d. h. der Flächenteilchen in den Dreiecken $\alpha\,\beta\,\gamma$ und ihrer Abstände von der durch die Spitze γ der Dreiecke gehenden Geraden; dieses statische Moment läßt sich auch bilden aus dem Produkt der ganzen Flächen der beiden Dreiecke $\alpha\,\beta\,\gamma$ und den Abständen ihrer Schwerpunkte von γ.

Die Fläche jedes Dreieckes ist $\frac{b\,.\,h}{4}$, und der Schwerpunktabstand beträgt $\frac{2}{3} \,.\, \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$, mithin ist das statische Moment der beiden Dreiecke $\alpha\,\beta\,\gamma$

1) H. Müller, Elementares Handbuch der Festigkeitslehre. Berlin 1875.