Die Konstruktionen in Holz

Warth, Otto

Leipzig, 1900

§ 7. Berechnung der an beiden Enden frei aufliegenden Träger

urn:nbn:de:hbz:466:1-77962

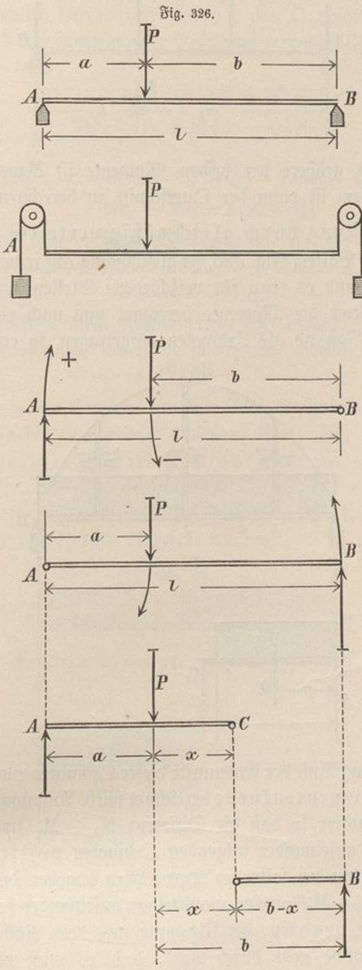
§ 7.

Berechnung der an beiden Enden frei aufliegenden Träger.

a) Belastung durch Einzellasten.

Ist ein frei auf zwei Stützen liegender Träger durch eine Last P belastet, so wird diese Last auf die beiden Stützen übertragen, und diese müssen den übertragenen Lasten einen

Fig. 326.



entsprechenden Widerstand entgegensetzen. Dieser Widerstand, oder der Gegendruck, der Auflagerreaktion genannt wird, kann an Stelle der Stütze als aufwärts gerichtete Kraft angebracht werden, Fig. 326.

Damit Gleichgewicht in diesem System mit nur lotrecht wirkenden Kräften vorhanden ist, müssen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein:

1) Damit keine Drehung entsteht, muß die Summe der statischen Momente auf jeden beliebigen Drehpunkt = Null sein;
2) damit keine Bewegung im lotrechten Sinne entsteht, muß die Summe der lotrecht wirkenden Kräfte = Null sein.

Zur Ermittelung der ersten Gleichgewichtsbedingung bezeichnen wir allgemein die rechtsdrehenden Momente als positiv, die linksdrehenden als negativ. Dann lautet unter Annahme, z. B. des Punktes B, als Drehpunkt die Gleichgewichtsbedingung

$$A l - P b = 0$$

und hieraus $$A = \frac{P \cdot b}{l} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Wird A als Drehpunkt angenommen, so wird

$$- B l + P a = 0$$

und hieraus $$B = \frac{P}{l} \cdot a \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Mithin $$A + B = \frac{P b}{l} + \frac{P a}{l} = P,$$

d. h. die beiden aufwärts gerichteten Auflagerreaktionen sind = der abwärts gerichteten Last, womit also auch die zweite Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

Aus (16) und (17) folgt:

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a},$$

d. h. die Auflagerreaktionen verhalten sich umgekehrt wie die Hebelarme.

Zur Bildung des Biegungsmomentes für eine beliebige Stelle C denke man sich den Träger in C durchschnitten, Fig. 326, und es ergeben sich folgende Momentengleichungen:

Von den links liegenden Kräften:

$$M_c = A (a + x) - P \cdot x,$$

d. i. $$M_c = A a - x (P - A).$$

Da (P — A) positiv, ist der zweite Wert unbedingt negativ, und der Wert von M_c wird deshalb am größten, d. h. $= M_{max}$, wenn $x (P - A)$ am kleinsten, d. h. wenn $x = 0$ wird (da $P - A$ in jedem Fall eine bestimmte unveränderliche Größe darstellt). Es wird dann:

$$M_{max} = A a$$

und da $$A = \frac{P}{l} b,$$

so wird $$M_{max} = \frac{P}{l} \cdot a \cdot b.$$

Wird das Moment von rechts gebildet, dann wird:

$$M_c = - B (b - x).$$

M_c wird somit wachsen mit abnehmendem x und am größten werden, wenn $x = o$ wird; dann wird $M_c = M_{max}$ und

$$M_{max} = - B b.$$

Da $B = \frac{P}{l} \cdot a$,

so wird $M\,max = -\frac{P}{l}\,a\,b$.

Es ergiebt sich hieraus, daß der absolute Wert des Biegungsmomentes (d. h. der Wert ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) derselbe ist, gleichviel, ob das Moment von den links- oder den rechtsliegenden Kräften gebildet wird.

Bei dem durch eine Einzellast beanspruchten Träger liegt somit der gefährliche Querschnitt im Angriffspunkt der Last, und es wird

$$M\,max = \frac{P}{l}\,a\,b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

und somit nach Formel (8)

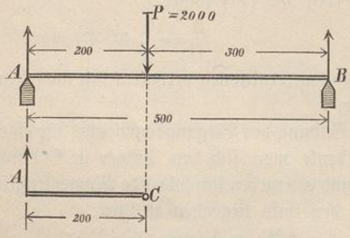
$$W = 0{,}0166\,\frac{P\,a\,b}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

und nach Formel (11)

$$b\,h^2 = 0{,}1\,\frac{P\,a\,b}{l} \quad . \; . \; . \; . \quad (19a)$$

Beispiel: Es sei (Fig. 327): P = 2000 kg,
a = 200 cm,
b = 300 cm,
l = 500 cm.

Fig. 327.



Dann ist:

$$W = 0{,}0166\,\frac{2000 \, . \, 200 \, . \, 300}{500} = 3984.$$

Nach der Tabelle Seite 105 können folgende Querschnitte verwendet werden:

22 × 33, q = 726 qcm, W = 3976,
29 × 29, q = 841 qcm, W = 4096,
24 × 32, q = 768 qcm, W = 4096.

Wird $a = b = \frac{l}{2}$, d. h. greift die Last in der Trägermitte an, dann wird

$$W = 0{,}0166\,\frac{P\,l}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

und

$$b\,h^2 = 0{,}1\,\frac{P\,l}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Wirken mehrere Einzellasten auf den Träger, z. B. P und P_1, dann wird Fig. 327a:

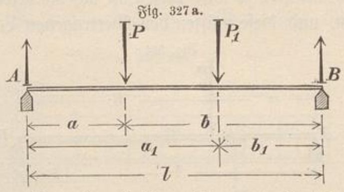
$$A = \frac{P\,b + P_1\,b_1}{l}$$

$$B = \frac{P\,a + P_1\,a_1}{l}$$

$$M_I = A\,a$$

$$M_{II} = A\,a_1 - P\,(a_1 - a).$$

Fig. 327a.

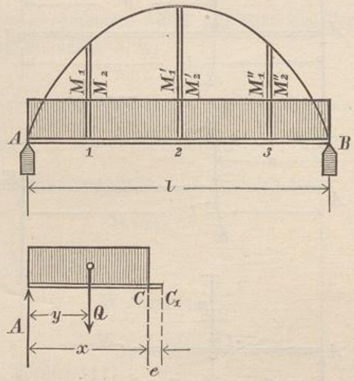


Das größere der beiden Momente ist M max, und nach diesem ist dann der Querschnitt zu berechnen.

b) Belastung durch gleichmäßig verteilte Lasten.

Der Balken, Fig. 328, sei gleichmäßig auf seine Länge l belastet, und es seien für verschiedene Stellen 1, 2, 3 . . . des Balkens die Momente berechnet und nach einem beliebigen Maßstab als Ordinaten aufgetragen, so ergiebt die

Fig. 328.



Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten eine Kurve, die als Momentenkurve bezeichnet wird. Anfangs wachsen die Ordinaten, so daß die Differenz $M_2 - M_1$ zweier unmittelbar aufeinander folgenden Ordinaten positiv wird; gegen B hin bei fallender Kurve wird dagegen die Differenz $M_2'' - M_1''$ zweier unmittelbar aufeinander folgenden Ordinaten negativ; der Übergang aus dem Positiven in das Negative geht durch Null, d. h. es muß von dem steigenden nach dem fallenden Teil der Kurve ein Übergang sein, bei dem die Differenz zweier unmittelbar aufeinander folgenden Ordinaten Null ist, d. h. $M_2' - M_1' = 0$.

Diese Stelle giebt zugleich die Maximalordinate, also das Maximalbiegungsmoment des Trägers.

Zur Bestimmung denken wir uns den Träger an einem beliebigen Punkte C in der Entfernung x von A durchschnitten; die Belastung des Trägerteiles A C sei Q, die im Schwerpunkt der Belastungsfläche in der Entfernung y von A vereinigt wird. Das Biegungsmoment für die Stelle C wird dann

$$M_c = A \cdot x - Q\,(x - y),$$

d. i. $$M_c = x\,(A - Q) + Q\,y.$$

Bilden wir ferner das Moment für die Stelle C_1 in der unendlich kleinen Entfernung e von C, wobei die unendlich kleine Zunahme der Belastung vernachlässigt werden kann, so wird

$$M_{c_1} = A\,(x + e) - Q\,(x + e - y),$$

d. i. $$M_{c_1} = (x + e)\,(A - Q) + Q\,y$$

mithin

$$M_{c_1} - M_c = (x + e)\,(A - Q) + Q\,y - [x\,(A - Q) + Q\,y],$$

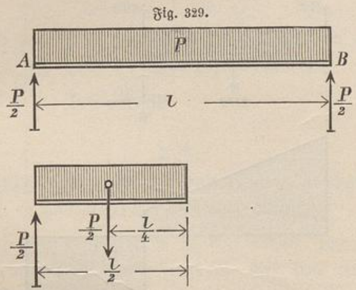
d. i. $$M_{c_1} - M_c = e\,(A - Q).$$

Nach dem vorstehend Gesagten soll aber für die Stelle des Maximalbiegungsmomentes $M_{c_1} - M_c = 0$ sein, mithin muß sein $0 = e\,(A - Q)$;

e ist unendlich klein angenommen, aber immer größer als Null, somit muß, wenn die vorstehende Gleichung erfüllt sein soll, $A - Q = 0$

sein; d. h. die Summe der Vertikalkräfte wird = Null. Wir erhalten somit den wichtigen Satz, daß sich das Maximalbiegungsmoment an derjenigen Stelle befindet, wo die Vertikalkraft $V = 0$ ist, wobei die aufwärtsgehenden Kräfte positiv, die abwärtsgehenden negativ eingesetzt werden.

Fig. 329.



Bei gleichmäßig über den Träger verteilter Belastung befindet sich das Maximalbiegungsmoment somit in der Trägermitte, und es wird, Fig. 329,

$$A = B = \frac{P}{2}$$

$$M\,max = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P\,l}{8} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Somit nach Gleichung (8)

$$W = 0{,}0166\,\frac{P\,l}{8},$$

d. i. $$W = 0{,}0021\,P\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

und nach Gleichung (11)

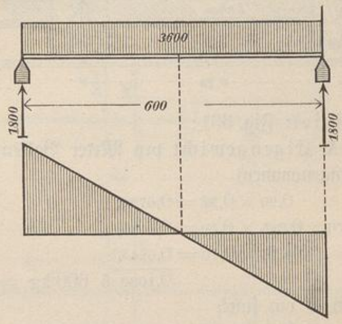
$$b\,h^2 = 0{,}1\,\frac{P\,l}{8},$$

d. i. $$b\,h^2 = 0{,}0125\,P\,l \quad . \; . \; . \; . \quad (23a)$$

Beispiel: Für einen Deckenbalken sei, Fig. 330,

$$P = 3600\ \mathrm{kg}$$
$$l = 600\ \mathrm{cm},$$

Fig. 330.



wobei die Länge l von Mitte zu Mitte des Auflagers zu rechnen ist; dann wird nach Formel (23)

$$W = 0{,}0021 \cdot 3600 \cdot 600 = 4536.$$

Dies giebt nach der Tabelle, Seite 105,

25/33 cm, q = 825 qcm, W = 4537,
oder 23/35 cm, q = 805 qcm, W = 4696.

Oder nach Formel (23 a)

$$b\,h^2 = 0{,}0125 \cdot 3600 \cdot 600$$

und hieraus, wenn z. B. $b = \frac{2}{3}\,h$ genommen wird:

$$\frac{2}{3}\,h \cdot h^2 = 0{,}0125 \cdot 3600 \cdot 600,$$

$$h = 35\ \mathrm{cm},$$
$$b = 23\ \mathrm{cm}.$$

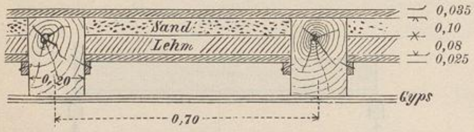
Derartig gleichmäßig belastete Balken sind die Deckenbalken und Unterzüge, deren Belastung sich zusammensetzt aus dem Eigengewicht der Konstruktion und der Verkehrslast.

Das Eigengewicht sollte in jedem einzelnen Fall nach der wirklich gewählten Konstruktionsweise berechnet werden, und nicht nach den in den Lehr- und Handbüchern angegebenen Durchschnittswerten, da die Eigengewichte je nach der Ausführungsweise in großen Grenzen schwanken.

Die Verkehrslasten sind je nach der Zweckbestimmung der Räume nach Erfahrungssätzen zu bestimmen, und zwar sind anzunehmen:

für Wohnräume . . .	150 kg	pro	Quadratmeter
„ Schulsäle	200	„	„
„ Tanzsäle	350	„	„
„ Heu- und Strohböden	400	„	„
„ Magazine .	500 – 1000	„	„
Belastung durch Menschengedränge	400	„	„

Fig. 331.



Beispiel: Fig. 331:

A. Eigengewicht pro Meter Balken:

Balken (angenommen)

$0{,}20 \times 0{,}36 = 0{,}0720,$

Streifboden $0{,}025 \times 0{,}50 = 0{,}0125,$

Boden . . $0{,}035 \times 0{,}70 = 0{,}0245,$

$0{,}1090$ à 600 kg $= 65{,}40$ kg,

Lehmestrich, 8 cm stark,

$(0{,}50 \times 0{,}08) = 0{,}04$ à 1600 kg $= 64{,}00$ kg,

Sandfüllung, 10 cm hoch,

$0{,}50 \times 0{,}10 = 0{,}05$ à 1600 kg $= 80{,}00$ kg,

Deckenputz . . . . . 0,70 qm à 30 kg $= 21{,}00$ kg.

Eigengewicht pro Meter Balken 230,40 kg.

B. Verkehrslast pro Meter Balken

(für Wohnräume 150 kg/qm)

0,70 qm à 150 kg . . . 105,00 kg.

Totallast pro Meter Balken . 335,40 kg.

(pro Quadratmeter Decke also $\frac{335{,}40}{0{,}70} = 479$ kg).

Bei 6 m lichter Weite wird hiernach

$P = 335{,}10 \times 6{,}00 = 2011$ kg

$l = 625$ cm (von Mitte Auflager bis Mitte Auflager).

Somit nach Formel (22)

$W = 0{,}0021 \cdot 2011 \cdot 625 = 2637.$

Dies giebt nach Tabelle, Seite 105,

25/25 cm, $q = 625$, $W = 2604$,

19/29 cm, $q = 551$, $W = 2663$,

18/30 cm, $q = 540$, $W = 2700$.

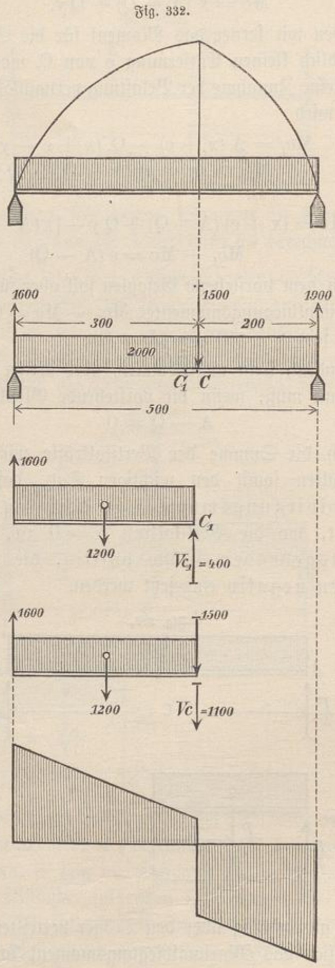
Der letzte Querschnitt, 18×30 cm, ist der vorteilhafteste, da er bei größter Tragfähigkeit die kleinste Querschnittsfläche besitzt.

C. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last und durch Einzellast.

Es kommt vor, daß Deckenbalken oder Unterzüge außer durch die Deckenlast noch durch einen oder mehrere Pfosten (der Dachstuhlkonstruktion u. s. w.) belastet werden, Fig. 332.

Nach dem Seite 109 festgestellten Grundsatz befindet sich das Maximalbiegungsmoment an derjenigen Stelle, für die die Vertikalkraft $V = 0$ ist, oder an der ein plötzlicher Übergang von $+V$ nach $-V$ stattfindet, wie dies

Fig. 332.



bei Einzellasten eintreten kann. In diesem Fall findet sich in der Momentenkurve keine Stelle mit wagrechter Tangente, wie in Fig. 328, d. h. also keine Stelle, für die die Differenz zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Ordinaten = Null wird, sondern die Momentenkurve hat im Angriffspunkt der Einzellast eine Spitze, so daß der Übergang aus dem Positiven in das Negative plötzlich erfolgt, Fig. 332.

Beispiel: Es sei:

die gleichmäßig verteilte Last P = 2000 kg,
die Einzellast . . . . . Q = 1500 kg,

dann wird bei den in Fig. 332 angegebenen Abmessungen:

$$A = \frac{2000}{2} + \frac{1500 \,.\, 2}{5} = 1600 \text{ kg}.$$

$$B = \frac{2000}{2} + \frac{1500 \,.\, 3}{5} = 1900 \text{ kg}.$$

Die Vertikalkraft unmittelbar vor dem Punkte C in C_1 wird:

$$Vc_1 = 1600 - \frac{2000}{5} \,.\, 3 = + 400 \text{ kg},$$

und diejenige im Punkte C:

$$Vc = 1600 - \left[\frac{2000}{5} \,.\, 3 + 1500\right] = - 1100 \text{ kg}.$$

Im Punkte C geht mithin die Vertikalkraft plötzlich von + 400 kg (d. h. aufwärts gerichtet) über in — 1100 kg (d. h. abwärts gerichtet), so daß sich die Vertikalkräfte, als Ordinaten aufgetragen, in der in Fig. 332 gegebenen Weise darstellen (s. hierwegen § 10). Das Maximalbiegungsmoment befindet sich somit im Angriffspunkt der Einzellast und wird:

$$M \max = 1600 \,.\, 300 - \left(\frac{2000}{5} \,.\, 3\right) 150 = 300\,000.$$

Somit nach Formel (8)

$$W = 0{,}0166 \,.\, 300\,000 = 4980;$$

die Tabelle, Seite 105, ergiebt

26/34 cm, q = 884, W = 5010.

Oder nach Formel (11):

$$b h^2 = 0{,}1 \,.\, 300000.$$

Wird z. B. b = 24 cm angenommen, dann wird:

$$24 \; h^2 = 0{,}1 \,.\, 300000$$

und somit $h = 36$ cm.

§ 8.
Der Träger ist nicht an den Enden, sondern an Zwischenpunkten unterstützt.

Wenn der Träger nicht an den Enden, sondern z. B. nach Fig. 333 derart unterstützt ist, daß das eine Ende über die Stütze hinausragt, wie dies bei der Konstruktion von Gallerien und Balkonen vorkommt, so werden sich zwei größte Momente bilden, eines zwischen den beiden Stützen und eines über der Stütze B, da das überragende Ende des Trägers als Freiträger zu betrachten ist.

Die Berechnung erfolgt in der nachstehend verzeichneten Weise unter Zugrundelegung der in Fig. 333 angenommenen Werte.

Zunächst sind die beiden Reaktionen zu bestimmen:

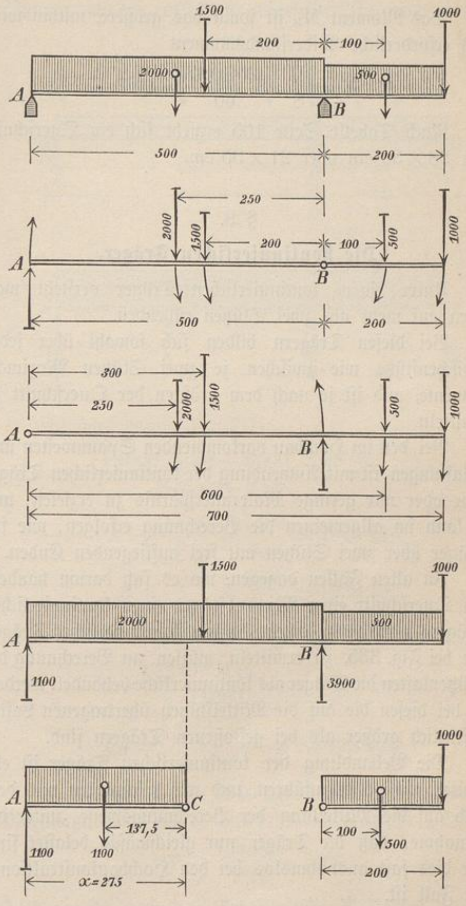
Drehpunkt B:

$$A \,.\, 5{,}00 - 2000 \,.\, 2{,}50 - 1500 \,.\, 2{,}00 + 500 \,.\, 1{,}00 + 1000 \,.\, 2{,}00 = 0$$
$$A = 1100.$$

Drehpunkt A:

$$-B \,.\, 5{,}00 + 2000 \,.\, 2{,}50 + 1500 \,.\, 3{,}00 + 500 \,.\, 6{,}00 + 1000 \,.\, 7{,}00 = 0$$
$$B = 3900.$$

Fig. 333.



Nunmehr ist der Punkt C zwischen A und B zu bestimmen, für den die Vertikalkraft V = 0 wird (oder aus dem Positiven in das Negative übergeht). Im vorliegenden Fall liegt dieser Punkt offenbar kurz vor dem Angriffspunkt der Einzellast, und es muß sein:

$$Vc = 0 = + 1100 - \frac{2000}{5} \,.\, x$$

und hieraus

$$x = \frac{1100}{400} = 2{,}75 \text{ m} = 275 \text{ cm}$$

Somit wird

$$Mc = 1100 \,.\, 275 - 1100 \,.\, 137{,}5 = 151250 \text{ kgcm}.$$