Die Konstruktionen in Holz

Warth, Otto

Leipzig, 1900

§ 10. Graphische Ermittelung der Reaktionen und der Biegungsmomente

urn:nbn:de:hbz:466:1-77962

§ 10.

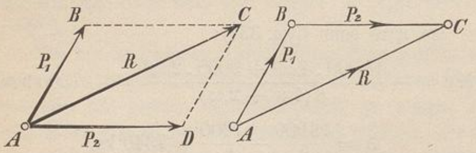
Graphische Ermittelung der Reaktionen und der Biegungsmomente.

Statt auf rechnerischem Wege können die Auflagerreaktionen und die Biegungsmomente auch mit Hilfe der graphischen Methode bestimmt werden. Da nach der graphischen Methode auch die Spannungen in den einzelnen Konstruktionsteilen der Dachstühle ermittelt werden, so sollen hier zunächst die erforderlichen allgemeinen Sätze aus der graphischen Statik angeführt werden (s. auch Band I dieses Handbuches, Seite 147).

A. Allgemeine Sätze.

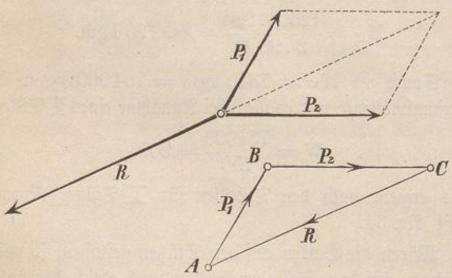
Satz 1. Die Resultierende zweier auf einen Punkt wirkenden Seitenkräfte P_1 und P_2, Fig. 338, bildet die Diagonale AC eines Parallelogramms. Da aber Seite $BC = AD = P_2$, so genügt es, P_2 nach Größe und Richtung an P_1 anzutragen, und die Schlußlinie AC mit der Pfeilrichtung von A nach C ergiebt die gesuchte Resultierende. Das Dreieck ABC nennt man ein Kräftedreieck.

Fig. 338.



Satz 2. Soll die mit den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht haltende Kraft ermittelt werden, so ist R gleich groß aber entgegengesetzt, also im Kräftedreieck mit umgekehrter Pfeilrichtung, von C nach A anzubringen, Fig. 339, so daß sich die Richtungspfeile der Kräfte nicht mehr begegnen, sondern in demselben Sinne fortschreiten.

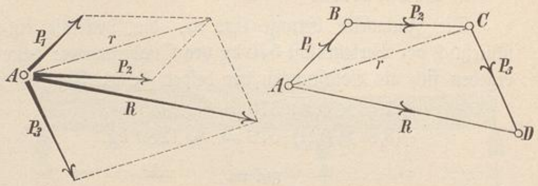
Fig. 339.



Satz 3. Soll dagegen eine Kraft R in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 von gegebener Richtung zerlegt werden, so geschieht dies durch Konstruktion des Kräftedreiecks, indem man durch die Endpunkte von R Parallele zu den gegebenen Richtungen zieht, die sich in B gegenseitig abschneiden. Die Längen AB und CB stellen die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 dar, deren Pfeilrichtung derjenigen von R entgegengesetzt ist. Wären P_1 und P_2 die das Gleichgewicht haltenden Kräfte, so würden sie mit R einerlei Pfeilrichtung erhalten.

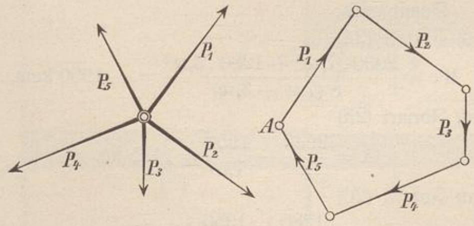
In derselben Weise verfährt man, wenn die Resultierende von beliebig vielen auf einen Punkt wirkenden Kräften zu ermitteln ist. Man trägt, Fig. 340, die Kräfte nach ihrer Größe und Reihenfolge so aneinander, daß die Richtungspfeile immer denselben Sinn haben; die Schlußlinie des Kräftezuges ergiebt die Resultierende aus sämtlichen Kräften mit der Pfeilrichtung vom Anfangspunkte A nach dem Endpunkte D des Kräftezuges. Fällt der Endpunkt des Kräftezuges

Fig. 340.



mit dem Anfangspunkte zusammen, dann ist der Kräftezug geschlossen, die Resultierende ist Null und die sämtlichen Kräfte sind miteinander im Gleichgewichte. Bei einem solchen Kräfteplan oder Kräftepolygon haben die sämtlichen Kräfte dieselbe Pfeilrichtung. Fig. 341.

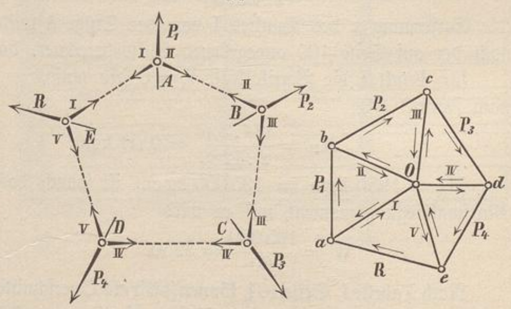
Fig. 341.



Satz 4. Schneiden sich die Kräfte nicht in einem Punkte, so findet man die das Gleichgewicht haltende Kraft auf folgende Weise: Fig. 342.

Gegeben seien die beliebig gerichteten Kräfte $P_1 - P_4$. Man bringe an P_1 beliebig zwei Gleichgewicht haltende Seitenkräfte I und II

Fig. 342.

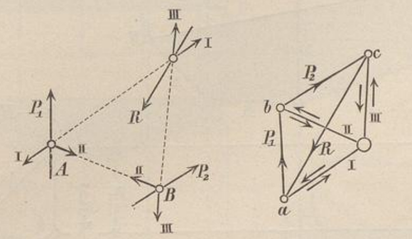


an, deren Größe in dem Kräftedreieck Oab bestimmt wird, verlängere II bis zum Schnitt mit P_2, bestimme im Kräftedreieck Obc eine Gleichgewicht haltende Seitenkraft III durch Ziehen der Schlußlinie Oc, verlängere III bis zum Schnitt mit P_3, bestimme wie vor die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft IV durch Ziehen der Schlußlinie Od, verlängere IV bis zum Schnitt mit P_4, ermittle wieder die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft V, durch Ziehen der Schlußlinie O e im Kräftedreieck O d e, und bringe nunmehr die Seitenkräfte V und I in E zum Schnitt, so ist E der Angriffspunkt der das Gleichgewicht haltenden Kraft, deren Größe durch die Schlußlinie a e des Kräfteplanes gegeben ist. Denn die Kräfte bilden jetzt ein geschlossenes Polygon a b c d e a mit gleicher Pfeilrichtung, und die Seitenkräfte I, II—V, die in jeder Seite des Linienzuges A B C D E paarweise auftreten, heben sich gegenseitig auf, sind somit ebenfalls im Gleichgewichte, so daß sich das ganze System im Gleichgewichte befinden muß. Den Linienzug A B C D E bezeichnet man als **Seilpolygon** (wenn die durch die Kräfte hervorgerufenen inneren Spannungen Zugspannungen sind), oder als **Druckpolygon** oder **Drucklinie** (wenn die inneren Spannungen Druckspannungen sind), die Strahlen O a, O b, u. s. w. als **Polstrahlen** und den Punkt O, der stets beliebig gewählt werden kann, als **Pol**.

Den Angriffspunkt der das **Gleichgewicht** haltenden Kraft erhält man somit im Durchschnittspunkte der letzten Seilstrahlen I und V des Seilpolygons. Soll die **Resultierende** aus den Kräften $P_1 — P_4$ bestimmt werden, so ist die Kraft a e mit entgegengesetzter Pfeilrichtung anzubringen.

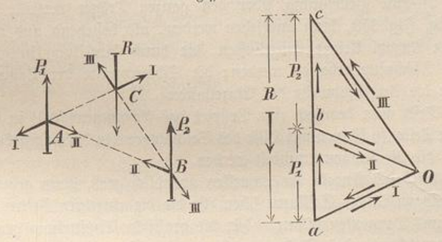
Ganz analog wird man auch z. B. bei nur zwei Kräften P_1 und P_2, Fig. 343, verfahren, indem man wieder bei P_1 die Seitenkraft I beliebig annimmt, die das Gleichgewicht haltende II ermittelt,

Fig. 343.



diese entgegengesetzt gerichtet an P_2 anbringt, und alsdann die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft III ermittelt. Der Schnittpunkt C der Seitenkräfte I und III ist dann der Angriffspunkt der das Gleichgewicht haltenden Kraft R, deren Größe und Richtung durch die Schlußlinie a c des Kräfteplanes gegeben ist, Fig. 343, denn die Kräfte bilden auch hier ein geschlossenes Polygon a b c mit gleicher Pfeilrichtung, und die Seitenkräfte I — III, die paarweise auftreten, heben sich gegenseitig auf.

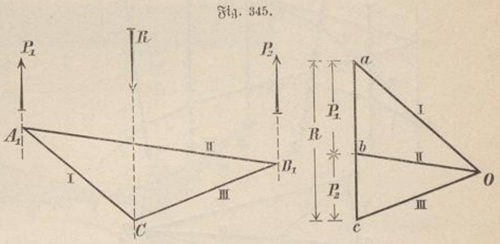
Fig. 344.



Werden die Kräfte P_1 und P_2 parallel, Fig. 344, so geben sie im Kräfteplan eine gerade Linie und fallen zusammen mit der das Gleichgewicht haltenden Kraft R; die Polstrahlen I, II und III gehen wie zuvor von den Punkten a, b und c aus, und der Durchgangspunkt der Schlußkraft R liegt im Schnittpunkt C der äußersten Seilstrahlen I und III.

Ist umgekehrt die Kraft R = a c bekannt, und es sollen die in den Punkten A und B angreifenden und zu R parallelen Kräfte ermittelt werden, Fig. 345, so ziehe man zunächst von dem beliebig gewählten Pol O aus die beiden Polstrahlen a O = I und c O = III,

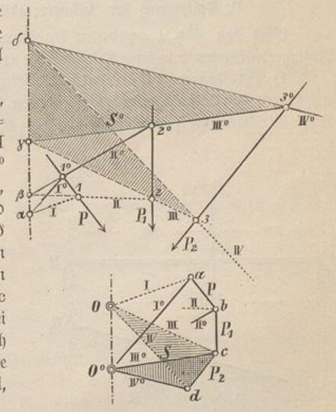
Fig. 345.



ziehe zwischen den Kräften von dem beliebig gelegenen Punkt C aus die Parallelen zu I und II, verbinde die Schnittpunkte A_1 und B_1 und ziehe im Kräfteplan O b = II, so giebt die Strecke a b zunächst dem Polstrahl I die in A angreifende, und b c zunächst dem Polstrahl III die in B angreifende Seitenkraft, deren Größe nunmehr nach dem gewählten Maßstab abgelesen werden kann.

Satz 5. Konstruiert man für eine Anzahl von Kräften aus verschiedenen Polen die entsprechenden Seilpolygone, so liegen die Schnittpunkte der gleichen Seilpolygonseiten auf einer geraden Linie, die zu der Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist.

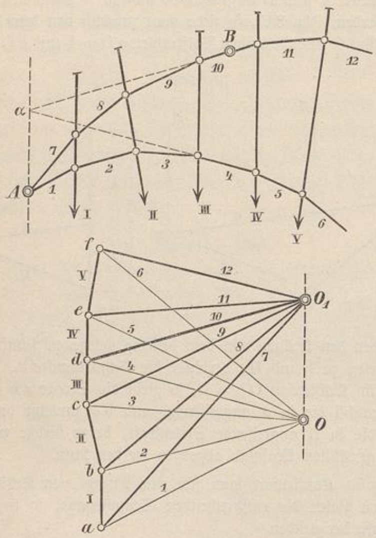
Fig. 346.



So schneiden sich, Fig. 346, die gleichliegenden Seilpolygonseiten I und I° in α, II und II° in β, III und III° in γ, IV und IV° in δ, und die Schnittpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen in einer Parallelen zu O O°. Denn in den beiden Vierecken O O° d c und $\gamma\, \delta$ 3° 3 sind drei Dreiecke einander ähnlich und fünf entsprechende Seiten einander parallel, nämlich O c $\parallel \gamma$ 3, O° d $\parallel \delta$ 3°, d c $\parallel$ 3 3°, O d $\parallel \delta$ 3 und O° c $\parallel \gamma$ 3°. Es muß deshalb $\gamma\, \delta \parallel$ O O° sein. Ebenso folgt, daß $\gamma\, \beta$ und $\beta\, \alpha \parallel$ O O° sein müssen, und daß somit die Punkte α, β, γ und δ auf einer zu O O° parallelen Geraden liegen.

Soll demnach zwischen mehreren beliebig gerichteten Kräften ein Seilpolygon so gezeichnet werden, daß es durch gegebene Punkte A und B gehe, Fig. 347, so zeichne man zunächst von einem beliebigen Pole aus ein Seilpolygon A 1 2 3 4 5 6, ziehe durch A eine beliebige Gerade, am einfachsten eine Lotrechte (oder auch eine Wagrechte), verlängere Seilstrahl 4, der unter dem Durchgangspunkt B liegt, bis zum Schnitt α mit dieser Senkrechten, ziehe α B und nunmehr im Kräfteplan O $O_1 \parallel$ A α, und durch d — zwischen Kraft III und IV — eine Parallele zu α B, so ist der Schnittpunkt O_1 der beiden Linien der Pol für ein neues Seilpolygon, das durch die angenommenen Punkte A und B hindurchgehen muß.

Fig. 347.

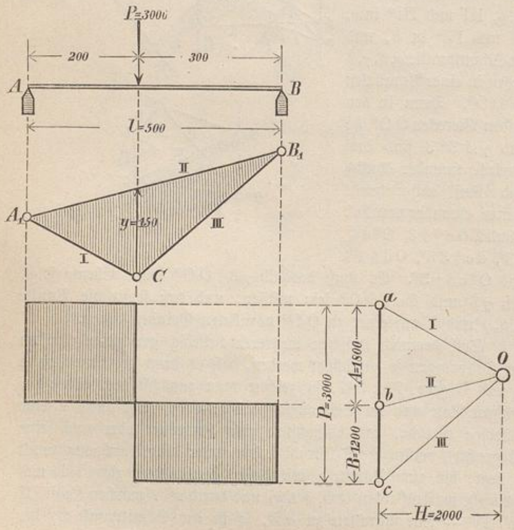


B. Bestimmung der Auflagerreaktionen.

Nach den Satz 4 gegebenen Ausführungen können die Auflagerreaktionen belasteter Träger leicht ermittelt werden.

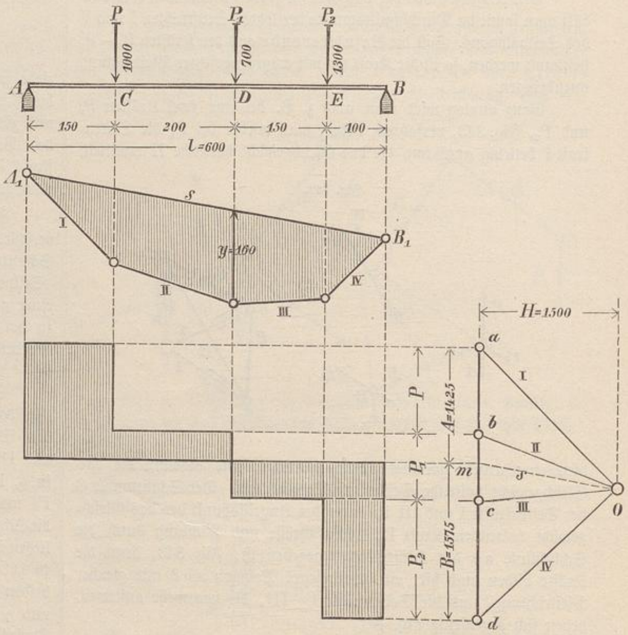
1) Der Träger A B sei durch die Einzellast P belastet, welche mit den lotrecht aufwärts gerichteten Reaktionen A und B im Gleichgewichte sein muß, Fig. 348. Man trage P nach einem beliebigen Maßstab auf der Kraftlinie a c auf, nehme Pol O beliebig, ziehe die Seilstrahlen O a und O c, und parallel hierzu von dem beliebigen Punkt C auf der verlängerten P die Parallelen I und III, ziehe die Verbindungslinie II der Schnittpunkte A_1 und B_1 und im Kräfteplan parallel hierzu O b, so teilt diese Linie die Strecke P, und a b zunächst dem Seilstrahl I wird = Reaktion A, und b c zunächst dem Seilstrahl III = Reaktion B, deren Größen nach dem Maßstab abgelesen werden können. (Über die Vertikalkraftfläche siehe § 10 D.)

Fig. 348.



2) Der Träger A B, Fig. 349, sei durch mehrere Einzellasten P, P_1 P_2 belastet; man trage die Kräfte auf eine Kraftlinie nach a b + b c + c d, nehme Pol O beliebig, und ziehe I ∥ O a, II ∥ O b, III ∥ O c, IV ∥ O d, und s ∥ A_1 B_1, so wird a m zunächst Seilstrahl I = Reaktion A, und d m zunächst Seilstrahl IV = Reaktion B.

Fig. 349.



3) Eine gleichförmig über den ganzen Träger verteilte Belastung, Fig. 350, kann angesehen werden, als bestehend aus einer großen Anzahl kleiner Einzellasten, die durch Einteilung in gleich große Abschnitte erhalten werden; die Schwerpunkte der Lamellen bilden die Angriffspunkte der Einzellasten.

Teilt man demnach zum Beispiel das Gesamtgewicht P in fünf gleiche Teile, so können mit Hilfe des Seilpolygons in der angegebenen Weise die Reaktionen ermittelt werden.

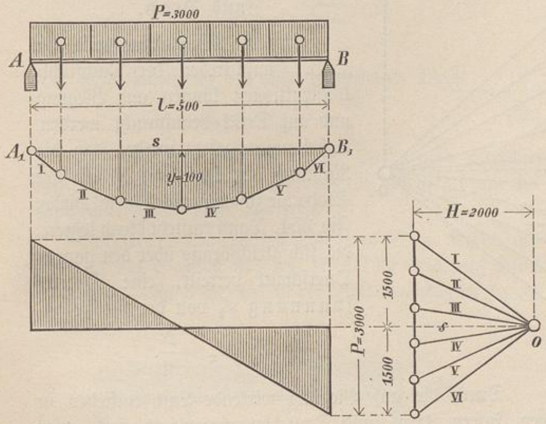
Wird die Anzahl der Lamellen unendlich groß, dann geht das Seilpolygon in die Seilkurve über, für die die einzelnen Seiten des Polygons Tangenten bilden. Für die praktische Ermittelung genügt die Verzeichnung des Seilpolygons.

4) Wenn der Träger nicht an den Enden, sondern z. B. nach Fig. 351 derart unterstützt ist, daß das eine Ende über die Stütze hinausragt, wie dies bei der Konstruktion von Gallerien und Balkonen vorkommt, so werden die Reaktionen in derselben Weise be-

stimmt. Die gleichmäßig verteilte Last betrage 1000 kg pro Meter, woraus sich die in der Figur angegebenen Belastungen ergeben. Man teile die Belastung der Strecke A B z. B. in fünf, und die des freien Endes z. B. in zwei gleiche Teile, zeichne hiernach das Seilpolygon, schneide Strahl I mit der verlängerten A, und Strahl VIII mit der verlängerten B, und ziehe im Kräfteplan s parallel mit der Verbindungslinie A_1 B_1, so ergiebt die Strecke a b die Reaktion A = 2100 kg, und die Strecke b c die Reaktion B = 4900 kg.

5) Sind außer den gleichmäßig verteilten Lasten noch Einzellasten vorhanden, Fig. 352, so ist auch in diesem Fall die gleichmäßig verteilte Last in entsprechender Weise in Lamellen einzuteilen, so z. B. die Last auf die Strecke A C in zwei, die Strecke CB in drei, und die Strecke B D in zwei gleiche Teile. Trägt man die so erhaltenen Einzelkräfte wieder der Reihe nach aneinander an, so können die Reaktionen in der vorstehend angegebenen Weise ermittelt werden.

Fig. 350.



C. Bestimmung der Biegungsmomente.

Soll für eine Anzahl beliebig vieler in einer Ebene liegenden Kräfte A, P, P_1 das Moment auf irgend einen in der Kraftebene liegenden Punkt C ermittelt werden, so muß unter Berücksichtigung der Drehungsrichtung die Summe der Produkte aus Kraft mal Hebelarm gebildet werden.

Es wäre somit nach Fig. 353

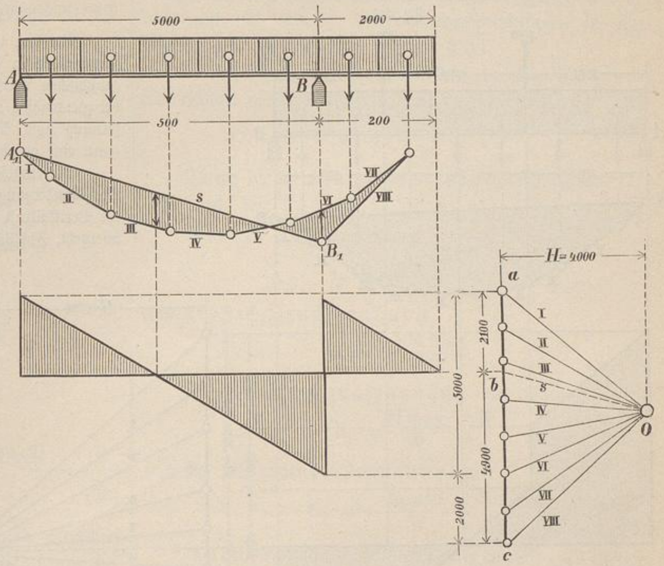
$$M_c = A\,a - P \cdot p - P_1 \cdot p_1.$$

Dieses Moment kann aber auch erhalten werden aus der Resultierenden dieser Kräfte mal dem normalen Abstande vom Drehpunkte C. Größe, Richtung und Angriffspunkt der Resultierenden R kann aber mit Zeichnung eines Seilpolygons ermittelt werden, indem man die Kräfte A, P und P_1 der Reihenfolge nach anträgt, ein Seilpolygon verzeichnet, und die äußersten Seilstrahlen s und III in D zum Schnitt bringt. D ist dann der Angriffspunkt der Resultierenden R, deren Größe und Richtung durch die Schlußlinie a d des Kräfteplanes gegeben ist; als Resultierende der Kräfte erhält sie entgegenlaufende, also aufwärtsgehende Pfeilrichtung.

Zieht man durch C die Linie E F ∥ R, so giebt r den normalen Abstand der R von C, und es wird mithin

$$M_c = R\,r.$$

Fig. 351.



Das Dreieck D E F ist ähnlich dem Dreieck O a d, da alle Seiten parallel sind. Es verhalten sich mithin die Grundlinien wie die Höhen, d. h.

$$R : y = H : r$$

und hieraus $$R\,r = H\,y$$

und somit: $$M_c = H \,.\, y,$$

d. h. das Biegungsmoment ist gleich dem Polabstand H multipliziert mit der Ordinate y.

Da für einen gegebenen Fall H konstant ist, so nimmt M_c ab mit abnehmendem y und zu mit zunehmendem y, und erreicht daher seinen größten Wert M max bei y max; es ist somit

$$M\,max = H \,.\, y\,max.$$

Dabei ist H nach dem Kräftemaßstabe in Kilogramm, y nach dem Längenmaßstabe in Centimeter auszudrücken.

Die Ordinaten y stellen also unmittelbar die Momente dar, und man nennt deshalb die durch das Seilpolygon und dessen Schlußlinie begrenzte Fläche die Momentenfläche.

In dem Beispiel Fig. 349 ist H = 1500 kg angenommen, y max ergiebt sich = 160, und es wird somit

$$M\,max = 1500 \,.\, 160 = 240000 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{240\,000}{60} = 4000,$$

wonach der Querschnitt nach Tabelle I, Seite 104 = 22/33, 29/29, 24/32.

Ebenso wird im Beispiel Fig. 350

$$M\,max = 2000 \,.\, 100 = 200000 \text{ kgcm}$$

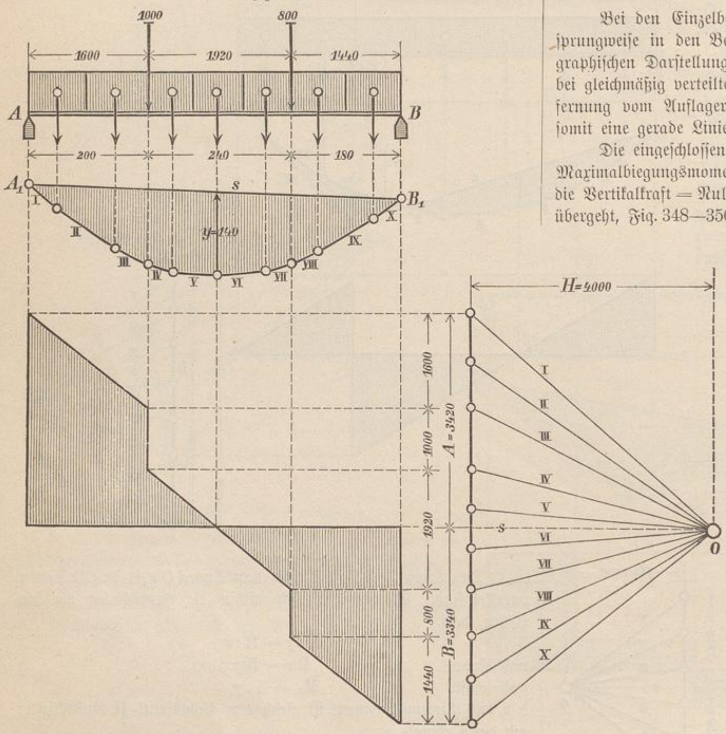
$$W = \frac{200\,000}{60} = 3333,$$

was einem Querschnitt von 21/31 oder 26/28 entspricht.

D. Bestimmung der Vertikalkräfte.

Wie im § 7 näher ausgeführt wurde, befindet sich das Maximalbiegungsmoment an derjenigen Stelle des Trägers, für die die Vertikalkraft entweder gleich Null ist, oder für die die Vertikalkraft aus dem Positiven plötzlich in das Negative überspringt.

Fig. 352.



Diese Vertikalkräfte lassen sich ebenfalls graphisch darstellen; so ist z. B., Fig. 349, die Vertikalkraft im Punkte A:

$$V_A = A \quad = \quad 1425 \text{ kg}$$

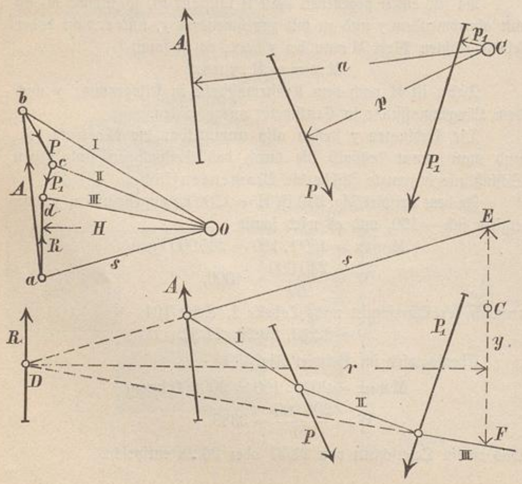
ebenso

$$V_C = A - P \quad = \quad 425 \text{ „}$$
$$V_D = A - (P + P_1) \quad = \quad -275 \text{ „}$$
$$V_E = A - (P + P_1 + P_2) = -1575 \text{ „}$$

Bei den Einzelbelastungen ändert sich somit die Vertikalkraft sprungweise in den Belastungspunkten, und es ergiebt sich bei der graphischen Darstellung eine treppenförmig fallende Linie, während bei gleichmäßig verteilter Last die Vertikalkraft proportional der Entfernung vom Auflager ist, und die graphische Darstellung ergiebt somit eine gerade Linie, Fig. 350.

Die eingeschlossene Fläche heißt **Vertikalkraftfläche**, und das Maximalbiegungsmoment befindet sich an derjenigen Stelle, an der die Vertikalkraft = Null ist, bezw. aus dem Positiven in das Negative übergeht, Fig. 348—350.

Fig. 353.



§ 11.

Beanspruchung auf Biegung und Druck.

Einzelne Konstruktionsteile, wie z. B. Hauptstreben bei Dachstuhlkonstruktionen können auf Biegung und auf Druck beansprucht werden, wobei vorausgesetzt werde, daß die Richtung der Druckkraft N mit der Stabachse zusammenfalle (axial wirke), Fig. 354. Dann entsteht durch letztere, die sich gleichförmig über den ganzen Querschnitt verteilt, eine **Druckspannung** s'_2 von der Größe

$$s'_2 = \frac{N}{q}.$$

Durch die auf Biegung wirkende Last entstehen in den Fasern **Zug- und Druckspannungen**, und zwar wird die **größte Zugspannung**

$$s_1 = \frac{M \max}{W}$$

und die **größte Druckspannung**

$$s_2 = \frac{M \max}{W}.$$

Da die aus beiden Belastungen resultierenden Spannungen senkrecht zum Querschnitt wirken, also gleichgerichtete Kräfte darstellen, so können sie unmittelbar addiert werden, und es wird somit, wenn die Zugspannung positiv, die Druckspannung negativ angenommen wird:

$$S_1 = s_1 - s'_2$$

und die größte Druckspannung:

$$S_2 = -s_2 - s'_2.$$