Die Konstruktionen in Holz

Warth, Otto

Leipzig, 1900

A. Allgemeine Sätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-77962

§ 10.

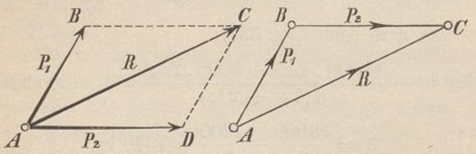
Graphische Ermittelung der Reaktionen und der Biegungsmomente.

Statt auf rechnerischem Wege können die Auflagerreaktionen und die Biegungsmomente auch mit Hilfe der graphischen Methode bestimmt werden. Da nach der graphischen Methode auch die Spannungen in den einzelnen Konstruktionsteilen der Dachstühle ermittelt werden, so sollen hier zunächst die erforderlichen allgemeinen Sätze aus der graphischen Statik angeführt werden (s. auch Band I dieses Handbuches, Seite 147).

A. Allgemeine Sätze.

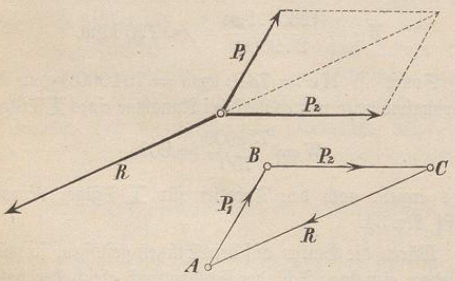
Satz 1. Die Resultierende zweier auf einen Punkt wirkenden Seitenkräfte P_1 und P_2, Fig. 338, bildet die Diagonale AC eines Parallelogramms. Da aber Seite $BC = AD = P_2$, so genügt es, P_2 nach Größe und Richtung an P_1 anzutragen, und die Schlußlinie AC mit der Pfeilrichtung von A nach C ergiebt die gesuchte Resultierende. Das Dreieck ABC nennt man ein Kräftedreieck.

Fig. 338.



Satz 2. Soll die mit den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht haltende Kraft ermittelt werden, so ist R gleich groß aber entgegengesetzt, also im Kräftedreieck mit umgekehrter Pfeilrichtung, von C nach A anzubringen, Fig. 339, so daß sich die Richtungspfeile der Kräfte nicht mehr begegnen, sondern in demselben Sinne fortschreiten.

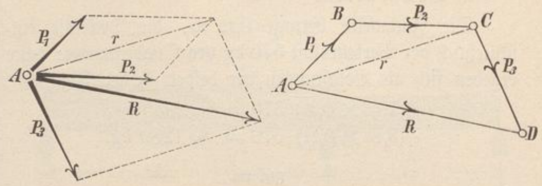
Fig. 339.



Satz 3. Soll dagegen eine Kraft R in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 von gegebener Richtung zerlegt werden, so geschieht dies durch Konstruktion des Kräftedreiecks, indem man durch die Endpunkte von R Parallele zu den gegebenen Richtungen zieht, die sich in B gegenseitig abschneiden. Die Längen AB und CB stellen die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 dar, deren Pfeilrichtung derjenigen von R entgegengesetzt ist. Wären P_1 und P_2 die das Gleichgewicht haltenden Kräfte, so würden sie mit R einerlei Pfeilrichtung erhalten.

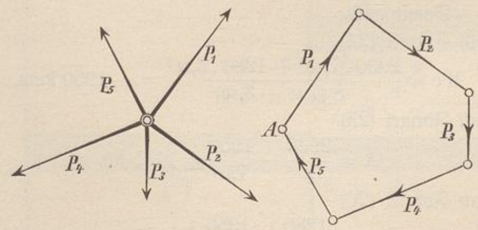
In derselben Weise verfährt man, wenn die Resultierende von beliebig vielen auf einen Punkt wirkenden Kräften zu ermitteln ist. Man trägt, Fig. 340, die Kräfte nach ihrer Größe und Reihenfolge so aneinander, daß die Richtungspfeile immer denselben Sinn haben; die Schlußlinie des Kräftezuges ergiebt die Resultierende aus sämtlichen Kräften mit der Pfeilrichtung vom Anfangspunkte A nach dem Endpunkte D des Kräftezuges. Fällt der Endpunkt des Kräftezuges

Fig. 340.



mit dem Anfangspunkte zusammen, dann ist der Kräftezug geschlossen, die Resultierende ist Null und die sämtlichen Kräfte sind miteinander im Gleichgewichte. Bei einem solchen Kräfteplan oder Kräftepolygon haben die sämtlichen Kräfte dieselbe Pfeilrichtung. Fig. 341.

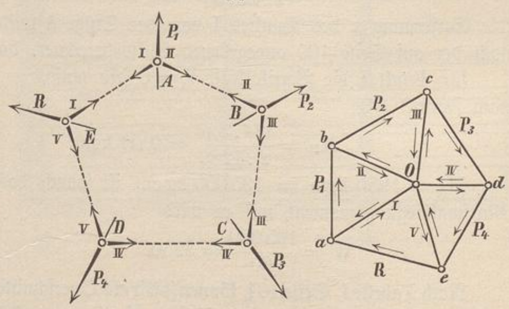
Fig. 341.



Satz 4. Schneiden sich die Kräfte nicht in einem Punkte, so findet man die das Gleichgewicht haltende Kraft auf folgende Weise: Fig. 342.

Gegeben seien die beliebig gerichteten Kräfte $P_1 - P_4$. Man bringe an P_1 beliebig zwei Gleichgewicht haltende Seitenkräfte I und II

Fig. 342.

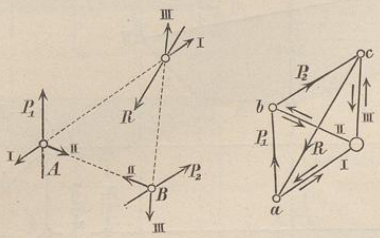


an, deren Größe in dem Kräftedreieck Oab bestimmt wird, verlängere II bis zum Schnitt mit P_2, bestimme im Kräftedreieck Obc eine Gleichgewicht haltende Seitenkraft III durch Ziehen der Schlußlinie Oc, verlängere III bis zum Schnitt mit P_3, bestimme wie vor die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft IV durch Ziehen der Schlußlinie Od, verlängere IV bis zum Schnitt mit P_4, ermittle wieder die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft V, durch Ziehen der Schlußlinie O e im Kräftedreieck O d e, und bringe nunmehr die Seitenkräfte V und I in E zum Schnitt, so ist E der Angriffspunkt der das Gleichgewicht haltenden Kraft, deren Größe durch die Schlußlinie a e des Kräfteplanes gegeben ist. Denn die Kräfte bilden jetzt ein geschlossenes Polygon a b c d e a mit gleicher Pfeilrichtung, und die Seitenkräfte I, II—V, die in jeder Seite des Linienzuges ABCDE paarweise auftreten, heben sich gegenseitig auf, sind somit ebenfalls im Gleichgewichte, so daß sich das ganze System im Gleichgewichte befinden muß. Den Linienzug ABCDE bezeichnet man als *Seilpolygon* (wenn die durch die Kräfte hervorgerufenen inneren Spannungen Zugspannungen sind), oder als *Druckpolygon* oder *Drucklinie* (wenn die inneren Spannungen Druckspannungen sind), die Strahlen O a, O b, u. s. w. als *Polstrahlen* und den Punkt O, der stets beliebig gewählt werden kann, als *Pol*.

Den Angriffspunkt der das *Gleichgewicht* haltenden Kraft erhält man somit im Durchschnittspunkte der letzten Seilstrahlen I und V des Seilpolygons. Soll die *Resultierende* aus den Kräften $P_1 - P_4$ bestimmt werden, so ist die Kraft a e mit entgegengesetzter Pfeilrichtung anzubringen.

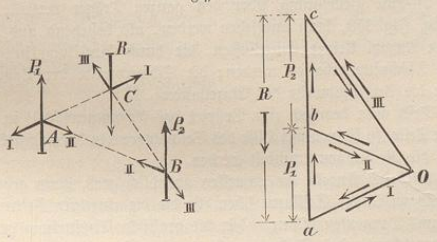
Ganz analog wird man auch z. B. bei nur zwei Kräften P_1 und P_2, Fig. 343, verfahren, indem man wieder bei P_1 die Seitenkraft I beliebig annimmt, die das Gleichgewicht haltende II ermittelt,

Fig. 343.



diese entgegengesetzt gerichtet an P_2 anbringt, und alsdann die das Gleichgewicht haltende Seitenkraft III ermittelt. Der Schnittpunkt C der Seitenkräfte I und III ist dann der Angriffspunkt der das Gleichgewicht haltenden Kraft R, deren Größe und Richtung durch die Schlußlinie a c des Kräfteplanes gegeben ist, Fig. 343, denn die Kräfte bilden auch hier ein geschlossenes Polygon a b c mit gleicher Pfeilrichtung, und die Seitenkräfte I — III, die paarweise auftreten, heben sich gegenseitig auf.

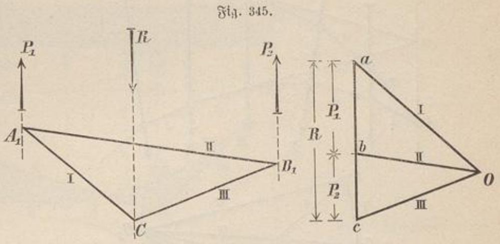
Fig. 344.



Werden die Kräfte P_1 und P_2 parallel, Fig. 344, so geben sie im Kräfteplan eine gerade Linie und fallen zusammen mit der das Gleichgewicht haltenden Kraft R; die Polstrahlen I, II und III gehen wie zuvor von den Punkten a, b und c aus, und der Durchgangspunkt der Schlußkraft R liegt im Schnittpunkt C der äußersten Seilstrahlen I und III.

Ist umgekehrt die Kraft R = a c bekannt, und es sollen die in den Punkten A und B angreifenden und zu R parallelen Kräfte ermittelt werden, Fig. 345, so ziehe man zunächst von dem beliebig gewählten Pol O aus die beiden Polstrahlen a O = I und c O = III,

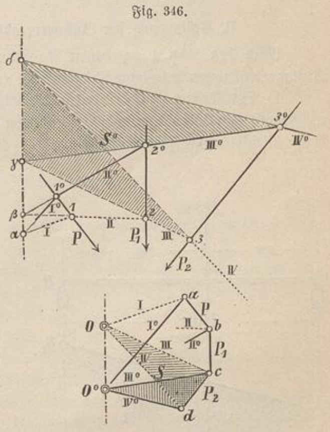
Fig. 345.



ziehe zwischen den Kräften von dem beliebig gelegenen Punkt C aus die Parallelen zu I und II, verbinde die Schnittpunkte A_1 und B_1 und ziehe im Kräfteplan O b = II, so giebt die Strecke a b zunächst dem Polstrahl I die in A angreifende, und b c zunächst dem Polstrahl III die in B angreifende Seitenkraft, deren Größe nunmehr nach dem gewählten Maßstab abgelesen werden kann.

Satz 5. Konstruiert man für eine Anzahl von Kräften aus verschiedenen Polen die entsprechenden Seilpolygone, so liegen die Schnittpunkte der gleichen Seilpolygonseiten auf einer geraden Linie, die zu der Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist.

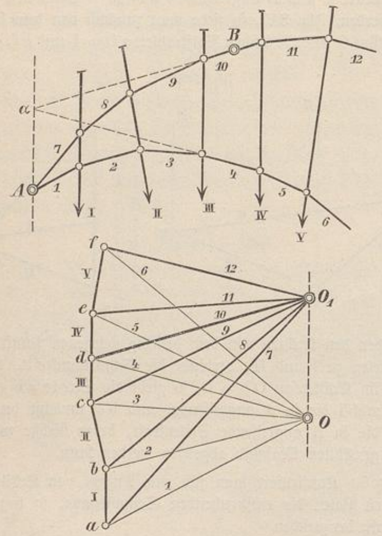
Fig. 346.



So schneiden sich, Fig. 346, die gleichliegenden Seilpolygonseiten I und I° in α, II und II° in β, III und III° in γ, IV und IV° in δ, und die Schnittpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen in einer Parallelen zu O O°. Denn in den beiden Vierecken O O° d c und $\gamma\ \delta$ 3° 3 sind drei Dreiecke einander ähnlich und fünf entsprechende Seiten einander parallel, nämlich O c ∥ γ 3, O° d ∥ δ 3°, d c ∥ 3 3°, O d ∥ δ 3 und O° c ∥ γ 3°. Es muß deshalb $\gamma\ \delta$ ∥ O O° sein. Ebenso folgt, daß $\gamma\ \beta$ und $\beta\ \alpha$ ∥ O O° sein müssen, und daß somit die Punkte α, β, γ und δ auf einer zu O O° parallelen Geraden liegen.

Soll demnach zwischen mehreren beliebig gerichteten Kräften ein Seilpolygon so gezeichnet werden, daß es durch gegebene Punkte A und B gehe, Fig. 347, so zeichne man zunächst von einem beliebigen Pole aus ein Seilpolygon A 1 2 3 4 5 6, ziehe durch A eine beliebige Gerade, am einfachsten eine Lotrechte (oder auch eine Wagrechte), verlängere Seilstrahl 4, der unter dem Durchgangspunkt B liegt, bis zum Schnitt α mit dieser Senkrechten, ziehe α B und nunmehr im Kräfteplan O O_1 ∥ A α, und durch d — zwischen Kraft III und IV — eine Parallele zu α B, so ist der Schnittpunkt O_1 der beiden Linien der Pol für ein neues Seilpolygon, das durch die angenommenen Punkte A und B hindurchgehen muß.

Fig. 347.

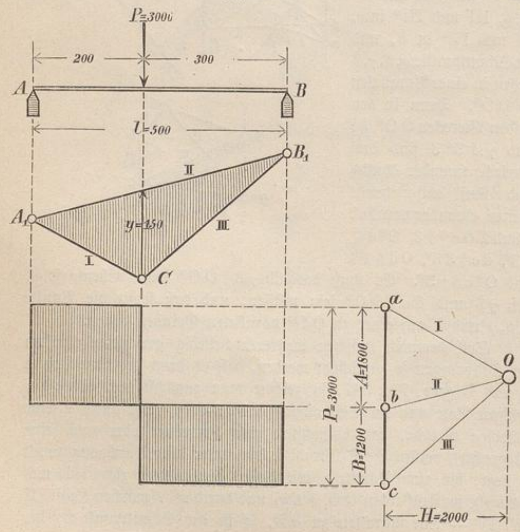


B. Bestimmung der Auflagerreaktionen.

Nach den Satz 4 gegebenen Ausführungen können die Auflagerreaktionen belasteter Träger leicht ermittelt werden.

1) Der Träger A B sei durch die Einzellast P belastet, welche mit den lotrecht aufwärts gerichteten Reaktionen A und B im Gleichgewichte sein muß, Fig. 348. Man trage P nach

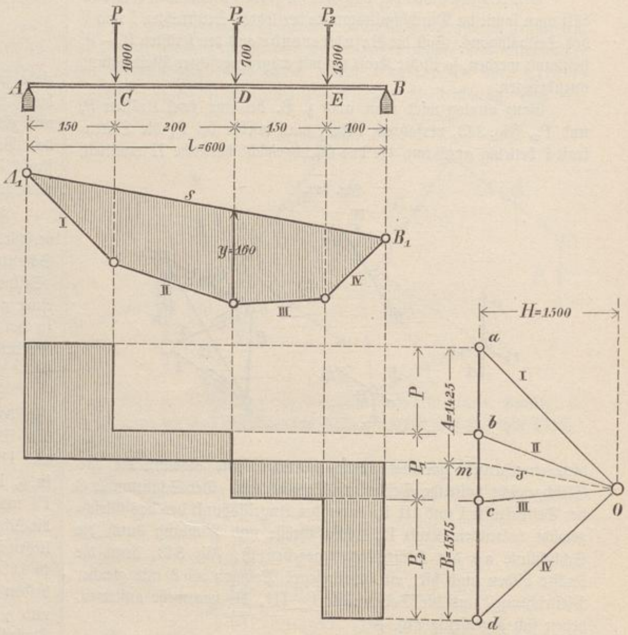
Fig. 348.



einem beliebigen Maßstab auf der Kraftlinie a c auf, nehme Pol O beliebig, ziehe die Seilstrahlen O a und O c, und parallel hierzu von dem beliebigen Punkt C auf der verlängerten P die Parallelen I und III, ziehe die Verbindungslinie II der Schnittpunkte A_1 und B_1 und im Kräfteplan parallel hierzu O b, so teilt diese Linie die Strecke P, und a b zunächst dem Seilstrahl I wird = Reaktion A, und b c zunächst dem Seilstrahl III = Reaktion B, deren Größen nach dem Maßstab abgelesen werden können. (Über die Vertikalkraftfläche siehe § 10 D.)

2) Der Träger A B, Fig. 349, sei durch mehrere Einzellasten P, P_1 P_2 belastet; man trage die Kräfte auf eine Kraftlinie nach a b + b c + c d, nehme Pol O beliebig, und ziehe I ∥ O a, II ∥ O b, III ∥ O c, IV ∥ O d, und s ∥ A_1 B_1, so wird a m zunächst Seilstrahl I = Reaktion A, und d m zunächst Seilstrahl IV = Reaktion B.

Fig. 349.



3) Eine gleichförmig über den ganzen Träger verteilte Belastung, Fig. 350, kann angesehen werden, als bestehend aus einer großen Anzahl kleiner Einzellasten, die durch Einteilung in gleich große Abschnitte erhalten werden; die Schwerpunkte der Lamellen bilden die Angriffspunkte der Einzellasten.

Teilt man demnach zum Beispiel das Gesamtgewicht P in fünf gleiche Teile, so können mit Hilfe des Seilpolygons in der angegebenen Weise die Reaktionen ermittelt werden.

Wird die Anzahl der Lamellen unendlich groß, dann geht das Seilpolygon in die Seilkurve über, für die die einzelnen Seiten des Polygons Tangenten bilden. Für die praktische Ermittelung genügt die Verzeichnung des Seilpolygons.

4) Wenn der Träger nicht an den Enden, sondern z. B. nach Fig. 351 derart unterstützt ist, daß das eine Ende über die Stütze hinausragt, wie dies bei der Konstruktion von Gallerien und Balkonen vorkommt, so werden die Reaktionen in derselben Weise be-