Die Konstruktionen in Holz

Warth, Otto

Leipzig, 1900

§ 14. Zerknickungsfestigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-77962

Somit nach Formel (31)

$$S_1 = \frac{75000}{1728} + \frac{11000}{432} = 43 + 26 = 69 \text{ kg}$$

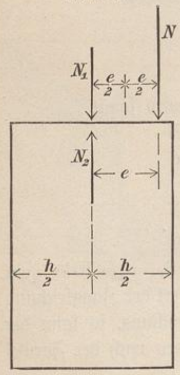
Der Querschnitt ist somit ausreichend.

§ 13.

Der excentrische Druck und Zug.

Bei den Holzkonstruktionen wirken infolge der Art und Weise der Verbindungen die Normalspannungen nicht in der Stabachse, sondern mehr oder weniger außerhalb derselben, wobei sich die Spannungen nicht mehr gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilen und zugleich Biegungsbeanspruchungen auftreten.

Fig. 357.



Nehmen wir an, die Druckkraft N greife nicht in der Stabachse, sondern in der Entfernung e von derselben an, Fig. 357, so können in der Achse zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte $N_1 = N_2 = N$ angebracht werden, wodurch an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert wird.

Die axiale Kraft N_1 bringt in dem Querschnitte eine gleichmäßig verteilte Druckspannung

$$S_2 = \frac{N_1}{q} = \frac{N}{q}$$

hervor, wogegen die Kräfte N und N_2 ein Kräftepaar bilden, dessen Biegungsmoment

$$M = N \cdot \frac{e}{2} + N_2 \cdot \frac{e}{2} = N \cdot e \quad . \quad . \quad (31\,a)$$

wird, da $N_2 = N$.

Der excentrische Druck ist somit eine Beanspruchung auf Biegung und Druck, weshalb die Querschnittsermittelung nach § 11, Formel (30), erfolgt. Es wird somit:

$$S_2 = \frac{M}{W} + \frac{N}{q} = \frac{N e}{W} + \frac{N}{q} \quad . \quad . \quad (31\,b)$$

oder

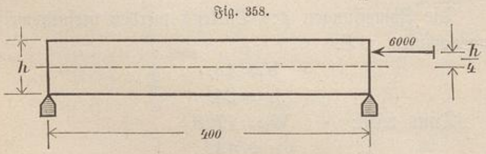
$$S_2 = N\left(\frac{e}{W} + \frac{1}{q}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

(s. auch Band I dieses Handbuches, S. 61).

Beispiel: Fig. 358. Es sei $N = 6000$,

$$e = \frac{h}{4},$$

Fig. 358.



wenn h wie bisher die Balkenhöhe bezeichnet. Man nehme versuchsweise:

$b = 12,$
$h = 18.$

Dann wird:

$q = 216$ qcm
$W = 648$
$e = 4{,}5$ cm.

Somit:

$$S_2 = 6000\left(\frac{4{,}5}{648} + \frac{1}{216}\right) = 68 \text{ kg}.$$

Da 70 kg/qcm (bei Dachstuhlkonstruktionen) zulässig sind, so ist der gewählte Querschnitt ausreichend.

Die excentrischen Druckspannungen, ebenso wie die excentrischen Zugspannungen, die in gleicher Weise nach Formel (32) zu berechnen sind (s. § 11), treten häufig gleichzeitig mit Biegungsspannungen auf, insbesondere bei den Dachstuhlkonstruktionen, worüber das Nähere im Kap. VII.

§ 14.

Zerknickungsfestigkeit.

Wird ein lotrecht stehender prismatischer Stab vom Querschnitt q durch eine Last N gepreßt, so entsteht eine Druckspannung

$$S = \frac{N}{q}.$$

Lange und dünne Stäbe werden nun aber erfahrungsgemäß nicht zerdrückt, sondern sie erfahren unter der Einwirkung der Last N eine Biegung, so daß sie eher zerknickt als zerdrückt werden.

Annäherungsweise kann auf elementarem Wege die zulässige Belastung in folgender Weise ermittelt werden.

Nimmt man an, Fig. 359, daß die Biegung des am unteren Ende fest eingespannten Stabes nach einer Kreislinie mit dem Radius r erfolge, und bezeichnen wir den sehr klein vorausgesetzten Biegungspfeil mit f, so wird das auf die Einspannungsstelle bezogene Biegungsmoment

$$M = N f.$$

Da aber nach Formel (6) auch

$$M = W S$$

ist, so wird

$$N f = W S,$$

und hieraus die größte Spannung

$$S = \frac{N f}{W}.$$

Da

$$W = \frac{T}{a}$$

so wird

$$S = \frac{N f \cdot a}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Nach Fig. 359 wird die Verlängerung v eines kurzen Stabstückes von der Länge λ:

$$v = \lambda_1 - \lambda.$$

Es verhält sich aber

$$\lambda : \lambda_1 = r : (r + a)$$

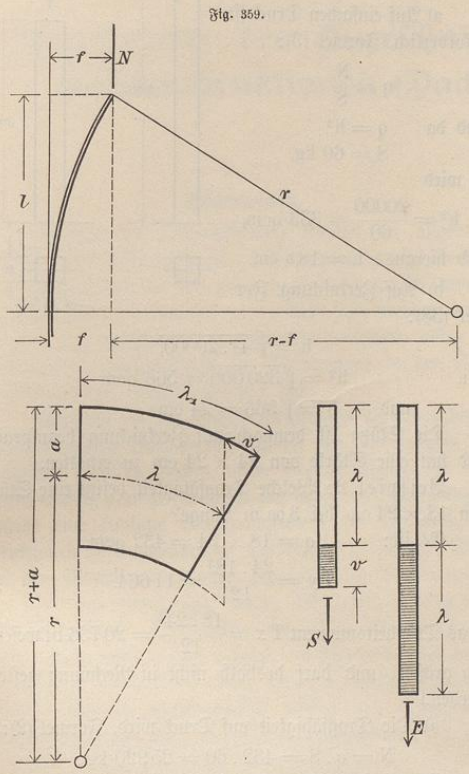
woraus

$$\lambda_1 = \frac{\lambda\,(r + a)}{r}.$$

Somit wird

$$v = \frac{\lambda\,(r + a)}{r} - \lambda = \frac{\lambda\,a}{r}$$

Fig. 359.



Nach Formel (1) wird auch, Fig. 359,

$$v = \frac{S\,\lambda}{E}$$

somit

$$\frac{\lambda\,a}{r} = \frac{S\,\lambda}{E}$$

und hieraus

$$S = \frac{a\,E}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Nach Fig. 359 wird:

$$r^2 = l^2 + (r - f)^2$$

und hieraus

$$r = \frac{l^2}{2\,f} + \frac{f}{2}.$$

Der Wert von $\frac{f}{2}$ ist gegenüber dem sehr großen Wert von $\frac{l^2}{2\,f}$ verschwindend, und kann ohne Fehler vernachlässigt werden, so daß wird

$$r = \frac{l^2}{2\,f}.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung β, dann wird

$$S = \frac{a\,E\,.\,2\,f}{l^2},$$

und somit unter Berücksichtigung von Gleichung (α)

$$\frac{a\,E\,.\,2\,f}{l^2} = \frac{N\,.\,f\,.\,a}{T}$$

woraus

$$N = \frac{2\,E\,T}{l^2}.$$

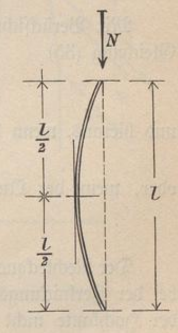
Diese Last P bildet die Grenzbelastung, und eine Vergrößerung der Last würde auch sofort eine Vergrößerung des Biegungspfeiles hervorrufen, weshalb als wirkliche Tragfähigkeit bei den Konstruktionen nur ein gewisser Teil, allgemein $\frac{1}{n}$ N zugelassen werden darf, woraus sich ergiebt

$$N = \frac{2\,E\,T}{n\,l^2}.$$

Die genauere Theorie liefert ein etwas größeres Ergebnis, und zwar

$$N = \frac{5\,E\,T}{2\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Fig. 360.



Sind die Enden des Stabes frei aufstehend, aber so verbunden, was bei jeder guten Konstruktion der Fall ist, daß sie stets in der Stabachse geführt werden, Fig. 360, so wird die Biegungskurve symmetrisch in Bezug auf die Mitte, und man kann sich den Stab in zwei an dem einen Ende lotrecht eingespannte, am anderen Ende freie Teile zerlegt denken, deren Länge $\frac{l}{2}$ ist. Dann wird die Tragfähigkeit

$$N = \frac{5\,E\,T}{n\,.\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

d. i.

$$N = \frac{10\,E\,T}{n\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und hieraus bei gegebener Last das Trägheitsmoment des Querschnittes

$$T = \frac{n\,l^2\,N}{10\,E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

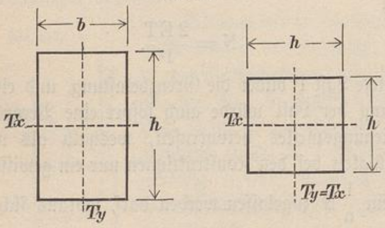
Bei den Baukonstruktionen ist im allgemeinen nach Formel (34) und (35) zu rechnen, da fest eingespannte Konstruktionsstäbe nur selten vorkommen, und bei jeder guten Konstruktion angenommen werden darf, daß die Stabenden infolge der Verbindungen seitliche Ausbiegungen nicht erfahren, sondern stets in der Stabachse geführt werden.

Für die Holzkonstruktionen wird fast ausschließlich Kiefern- und Tannenholz verwendet, für welche anzunehmen ist:

$$n = 10$$
$$E = 120000.$$

Bezüglich des Trägheitsmomentes ist zu beachten, daß der Rechteckquerschnitt, Fig. 361, zwei verschieden große

Fig. 361.



Trägheitsmomente, Tx und Ty, besitzt, und daß sich der Stab unter der Einwirkung der Last nicht nach der Hochkante, sondern nach der Schmalkante durchbiegt. Es ist somit das kleinere der beiden Trägheitsmomente in Rechnung zu stellen, d. i.

$$T = \frac{h\,b^3}{12}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werte ergiebt sich aus Gleichung (35)

$$\frac{h\,b^3}{12} = \frac{10 \,.\, l^2 \,.\, N}{10 \,.\, 120000},$$

und hieraus, wenn die Länge l in Meter eingesetzt wird

$$h\,b^3 = l^2 N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

oder, wenn der Querschnitt gegeben ist, die Tragfähigkeit

$$N = \frac{h\,b^3}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Der Rechteckquerschnitt ist ökonomisch unvorteilhaft, da bei der Zerknickungsbeanspruchung die Tragfähigkeit nach der Hochkante nicht ausgenutzt wird, und hier also überflüssiges Material vorhanden ist. Es empfehlen sich deshalb nur solche Querschnitte, die zu zwei sich rechtwinkelig schneidenden Achsen symmetrisch sind; bei den Holzkonstruktionen ist dies insbesondere der quadratische Querschnitt, für den b = h wird, Fig. 361. Dann ist nach Gleichung (36)

$$h^4 = l^2 N$$

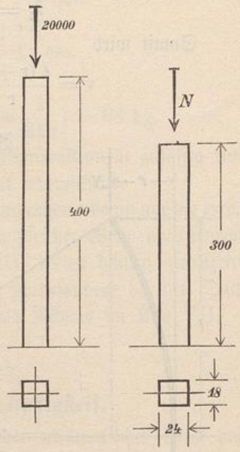
und hieraus

$$h = \sqrt[4]{l^2 N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und bei gegebenem Querschnitt die Tragfähigkeit

$$N = \frac{h^4}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Fig. 362.



Beispiel 1: (Fig. 362.) Eine quadratische Stütze von 4 m Höhe habe 20000 kg zu tragen; es ist der Querschnitt zu ermitteln.

a) Auf einfachen Druck ist erforderlich, Formel (3):

$$q = \frac{N}{S}$$

und da $q = h^2$
$S = 60$ kg,

so wird

$$h^2 = \frac{20000}{60} = 333 \text{ qcm},$$

und hieraus $h = 18{,}5$ cm.

b) Auf Zerknickung, Formel (38):

$$h = \sqrt[4]{4^2 \,.\, 20000},$$

d. i. $h^2 = \sqrt{320\,000} = 566$ qcm

und $h = \sqrt{566} = 24$ cm.

Die Stütze ist demnach auf Zerknickung beansprucht und hat eine Stärke von 24×24 cm zu erhalten.

Beispiel 2: Welche Tragfähigkeit besitzt eine Stütze von 18×24 cm bei 3,00 m Länge?

Es ist: $q = 18 \times 24 = 432$ qcm,

$$Ty = \frac{24 \,.\, 18^3}{12} = 11\,664.$$

(Das Trägheitsmoment $Tx = \frac{18 \,.\, 24^3}{12} = 20\,736$ ist wesentlich größer, und darf deshalb nicht in Rechnung gestellt werden.)

a) Die Tragfähigkeit auf Druck wird, Formel (2):

$$N = q \,.\, S = 432 \,.\, 60 = 25\,920 \text{ kg};$$

b) auf Zerknickung, Formel (37):

$$N = \frac{h\,b^3}{l^2} = \frac{24 \,.\, 18^3}{3^2} = 15\,552 \text{ kg}.$$

Hiernach darf der Pfosten nur mit circa 15500 kg belastet werden.

Ein quadratischer Pfosten von 21×21 cm Stärke hat annähernd denselben Querschnitt wie der vorstehend berechnete rechteckige (441 gegen 432 qcm); er würde aber tragen können:

$$N = \frac{21^4}{3^2} = 21\,600 \text{ kg},$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, wie unvorteilhaft der rechteckige Querschnitt bei Zerknickungsbeanspruchung ist.