Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Theil I. Mathematische Vorstudien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Theil I.

Mathematische Vorstudien.

4.

I. Sphärische Trigonometrie.

§ 1.

Erläuterungen.

Ein von drei Bögen grösster Kugelkreise eingeschlossenes Dreieck heisst ein **sphärisches** Dreieck. Die Seiten desselben sind also Bögen grösster Kugelkreise und werden gemessen durch ihre Centriwinkel. Unter dem sin, cos etc. einer **Seite** versteht man demgemäss den sin, cos etc. des zu dieser Seite gehörigen Centriwinkels.

Unter den Winkeln des sphärischen Dreiecks versteht man die Neigungen der Ebenen der drei das Dreieck einschliessenden grössten Kugelkreise untereinander, z. B. wird der Winkel C des Dreiecks A B C, Fig. 1, erhalten, wenn man in C an die Kreise C A und C B Tangenten zieht*), oder auch, indem man in einem beliebigen Punkte D der gemeinschaftlichen Kante C M auf eben diese Kante in den Ebenen A C M und B C M Lothe, D A und D E, errichtet. Ist $\angle$ A D E bei D rechtwinklig, so heisst auch $\triangle$ A C B ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

§ 2.

Das rechtwinklig sphärische Dreieck.

Bezeichnet man die beiden Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c, die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, so finden im rechtwinklig sphärischen Dreiecke folgende Relationen statt. (Fig. 1.)

$$\text{I} \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}. \tag{1}$$

$$\text{II} \quad \cos c = \cos a \,.\, \cos b. \tag{2}$$

$$\text{III} \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}. \tag{3}$$

$$\text{IV} \quad \sin b = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} \alpha} \text{ und } \sin a = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} \beta}. \tag{4}$$

$$\text{V} \quad \cos c = \cot \alpha \,.\, \cot \beta. \tag{5}$$

$$\text{VI} \quad \sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b} \text{ und } \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}. \tag{6}$$

Beweis:

Zu I: Sind A E und E D $\perp$ B C, so ist:

$$\sin \beta = \sin \text{A E D} = \frac{\text{A D}}{\text{A E}} = \frac{\text{A M} \sin b}{\text{A M} \sin c} = \frac{\sin b}{\sin c}, \text{ also}$$

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ und analog } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$

*) Man begreift leicht, dass dieser Winkel stets grösser ist, als der von den **Sehnen** C A und C B eingeschlossene Winkel, und zwar um so mehr, je spitzere Winkel letztere mit der Kante C M bilden. Die Winkelsumme im sphär. Dreiecke ist daher stets grösser als 180°. — Vergl. § 4.

Zu II: $\cos a = \frac{EM}{MD}$, $\cos b = \frac{MD}{AM}$, also $\cos a \cdot \cos b = \frac{EM}{AM} = \cos c$.

Zu III: $\cos\beta = \cos AED = \frac{DE}{AE} = \frac{ME \operatorname{tang} a}{ME \operatorname{tang} c} = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}$.

Zu IV: $\operatorname{tang}\beta = \frac{AD}{DE} = \frac{DM \operatorname{tang} b}{DM \sin a} = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$ etc.

Aehnlich ist der Beweis zu V zu führen. Es folgt dann VI aus II, III und V.

§ 3.
Schiefwinklig sphärisches Dreieck.

In jedem sphärischen Dreiecke gelten die beiden Sätze:

I Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. (7)

II Cosinussatz: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$. (8)

Beweis:

Zu I: Der grösste Kugelkreis $CD = h$ (Fig. 2 a u. b) sei $\perp AB$.

Nach § 2, I ist $\sin h = \sin b \cdot \sin\alpha, = \sin a \sin\beta$,

folglich: $\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta$ etc.

Zu II: Im Folgenden gelten die oberen Vorzeichen für Fig. 2a, die unteren für Fig. 2b. Nach § 2 II ist:

$$\cos a = \cos h \cdot \cos q = \cos h \cdot \cos (c \mp p)$$

oder 1) $\cos a = \cos h \cdot \cos c \cdot \cos p \pm \cos h \sin c \cdot \sin p$.

Ferner ist nach § 2 II

2) $\cos h \cos p = \cos b$, oder mit $\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b\, (\pm \cos\alpha)$ multiplicirt:

$\cos h \cdot \sin p = \cos b \cdot \operatorname{tang} b\, (\pm \cos\alpha)$

oder:

3) $\cos h \sin p = \pm \sin b \cdot \cos\alpha$.

Durch Einsetzen von 2) und 3) in 1) erhält man:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha.$$

Folgerung:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c.} \qquad (8a)$$

§ 4.
Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess.

1) **Erklärung:** Der zwischen den Halbperipherien zweier sich schneidenden grösster Kugelkreise liegende Theil der Kugeloberfläche heisst **Kugelstreifen.** Derselbe verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 360^0.

Unter dem **sphärischen Excess** versteht man den Ueberschuss der Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks über 180^0, — vergl. die Anmerkung zu § 1.

2) **Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.** Verlängert man (Fig. 3) die Seiten AB und AC des sphär. Dreiecks ABC über B und C hinaus, so schneiden sie sich im Endpunkte D des Durchmessers AD. Es ist dann $\triangle AEF = \triangle CBD$, wegen Gleichheit der Seiten*). Ferner ist die Summe der Streifen mit den Winkeln α, β, γ:

*) Die Gleichheit der Seiten ergiebt sich daraus, dass dieselben gemeinschaftliche Ergänzungen zum Halbkreise haben, z. B. $FE + EC =$ Halbkreis, $BC + EC =$ Halbkreis, also $FE = BC$.

$$\text{strf}\,\alpha + \text{strf}\,\beta + \text{strf}\,\gamma = \text{Halbkugel} + 2 \triangle ABC$$

oder, da die Halbkugel = strf 180^0:

$$\triangle ABC = \frac{\text{strf}\,(\alpha + \beta + \gamma - 180^0)}{2}$$

oder wenn E den sphärischen Excess bezeichnet:

$$\triangle ABC = \frac{\text{strf}\,E}{2}$$

Ist E in Graden ausgedrückt, so ist $\text{strf}\,.\,\frac{E}{2} = E \times \frac{\text{Kugeloberfl.}}{2 \times 360} = \frac{4\,r^2 \pi E}{4 \times 180}$ $= \frac{r^2 \pi E}{180}$, also

$$\triangle = \frac{r^2 \pi E}{180} \tag{9}$$

3) **Sphärischer Excess.** Aus (9) folgt, wenn nunmehr der Flächeninhalt des Dreiecks = F gesetzt wird:

$$E^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2}$$

oder in Sekunden:

$$E'' = \frac{648\,000}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2}. \tag{10}$$

II. Analytische Geometrie.

§ 5.
Rechtwinklige Coordinaten.

Sind zwei rechtwinklig sich schneidende Gerade ihrer Lage nach gegeben, so ist jeder Punkt, (P Fig. 4), zwischen denselben seiner Lage nach bekannt, wenn seine Abstände y und x von den beiden Geraden (Axen) gegeben sind. Da jedoch 4 Quadranten vorhanden, so entsteht in Bezug auf den Punkt P eine Vierdeutigkeit, die dadurch beseitigt wird, dass man den Abständen y und x, (Coordinaten), bestimmte Vorzeichen beilegt, wie aus Fig. erhellt. Beispielsweise liegt der Punkt P mit den Coordinaten + y und — x, (P_{+y-x}) im II. Quadranten.

Der Abstand y heisst Ordinate, x Abscisse. Die gegebenen Coordinatenaxen heissen Abscissenaxe (X Axe) und Ordinatenaxe, (Y Axe), ihr Schnittpunkt 0 heisst Coordinatennullpunkt.

§ 6.
Polarcoordinaten.

Ist die Entfernung 0 P = s und der Winkel X 0 P = α gegeben, so ist der Punkt P ebenfalls bestimmt. Die Vierdeutigkeit in Bezug auf die Quadranten fällt hier fort. Die den Punkt P bestimmenden Elemente (s und α) heissen Polarcoordinaten. Aus ihnen lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten (Orthogonalcoordinaten) leicht herleiten, denn es ist:

$$y = s \sin \alpha,\quad x = s \cos \alpha. \tag{11}$$

§ 7.

Gleichung einer Linie.

Hat man eine Gleichung mit zwei Unbekannten, y und x, so erhält man aus derselben für y verschiedene Werthe, wenn man für x nach und nach verschiedene Werthe einsetzt und die Gleichung nach y auflöst. Es ist also y eine von x abhängige Grösse, eine „Funktion von x“, ($y = f(x)$). Fasst man y und x als Coordinaten auf, construirt die den verschiedenen Werthen, welche man für x angenommen und für y berechnet hat, entsprechenden Punkte, indem man die Grössen x der Reihe nach vom Durchschnittspunkt zweier rechtwinklig sich schneidenden Graden aus auf einer dieser Beiden Linien, (x Axe), abträgt, und in den so gewonnenen Punkten Senkrechte gleich den zugehörigen y errichtet, so gehören alle die so construirten Punkte einer Linie (Kurve) an, deren Verlauf von der Form der Gleichung $y = f(x)$ abhängt. Die Gleichung $y = f(x)$ heisst die Gleichung dieser Kurve. Haben wir z. B. die Gleichung $y = ax$, setzen in dieselbe für x der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 . . . ein, so erhalten wir die zugehörigen Werthe für $y = a, 2a, 3a$ . . . . Tragen wir die Werthe 1, 2, 3 . . . vom Nullpunkte aus auf der x Axe ab, errichten in den so erhaltenen Punkten dieser Axe Senkrechte $= a, 2a, 3a$ . . ., so gehören die Endpunkte dieser Senkrechten sämmtlich einer graden Linie an, welche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht, wie man leicht einsieht. Die Gleichung $y = ax$ ist also die Gleichung einer Geraden, welche die beiden Axen im Nullpunkte schneidet.

§ 8.

Gleichung der Geraden.

Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissenaxe im Punkte A (Fig. 5) unter dem Winkel α schneidet, ist, wenn c den Abstand des Punktes A vom Nullpunkte, (d. h. die Abscisse des Punktes A) bezeichnet:

$$y = (x - c) \tang \alpha$$

denn diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt P der Geraden A P. Für $\tang \alpha = a$ lautet dieselbe:

$$y = (x - c)\, a$$

oder für $-a \cdot c = b$:

$$y = ax + b. \tag{12}$$

Jede Gleichung von der Form $y = ax + b$ stellt eine grade Linie dar. Die Grösse $b = -ac = -c \tang \alpha$ bedeutet den Abstand des Punktes B, in welchem die Gerade die Ordinatenaxe schneidet, vom Nullpunkte 0. Wäre c negativ, läge also A in Fig. 5 **links** von 0, so wäre $b = -ac$ positiv, der Durchschnitt B würde also oberhalb 0 zu liegen kommen.

§ 9.

Schnittpunkt zweier Linien.

Hat man für 2 sich schneidende Linien deren Gleichungen:

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1$$
$$y_2 = a_2 x_2 + b_2$$

so wird für den Durchschnittspunkt offenbar $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$ sein. Setzen wir

$y_1 = y_2 = y$, $x_1 = x_2 = x$, so erhalten wir die Coordinaten für den Schnittpunkt beider Linien aus den zwei Gleichungen:

$$y = a_1 x + b_1$$
$$y = a_2 x + b_2$$

welche nach x und y aufzulösen sind.

§ 10.

Umformung der Coordinaten.

Gegeben seien die Coordinaten eines Punktes P, Fig. 6, bezogen auf das Coordinatensystem 0′Y′, 0′X′, gesucht die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das System 0 Y, 0 X. Die Neigung der Abscissenaxen beider Systeme zu einander sei α, die Coordinaten des Punktes 0′, bezogen auf das System 0 Y, 0 x seien a, (Abscisse), und b, (Ordinate), so ist:

$$x = 0S - QS = a + 0'R - Q'T$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ \text{und analog} \quad y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{array}\right\} \tag{13}$$

§ 11.

Gleichung des Kreises.

Ist der Kreismittelpunkt Nullpunkt des Coordinatensystems, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises ohne Weiteres: — vergl. Fig. 7a:

$$y^2 = r^2 - x^2 \tag{14}$$

(Mittelpunktsgleichung.) Liegt dagegen der Nullpunkt in einem Endpunkte des Durchmessers, und betrachtet man diesen als Abscissenaxe, die Tangente im Nullpunkte als Coordinatenaxe, Fig. 7b, so ergiebt sich die **Scheitelgleichung:**

$$y^2 = r^2 - (r - x)^2$$
$$= 2rx - x^2$$
$$y = \sqrt{2rx - x^2} \tag{14a}$$

Die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens deutet an, dass die Ordinaten positiv und negativ, d. h. zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegen können. Da der Wurzelausdruck rechts allein steht, so sind die beiden aus dem Ausdrucke rechts sich ergebenden Werthe für y ihrem absoluten Werthe nach gleich, nur dem Vorzeichen nach verschieden, womit angedeutet ist, dass zu einer Abscisse zwei gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten gehören.

Da es ganz gleichgültig ist, welche der beiden Axen man als Xaxe und welche man als Yaxe ansehen will, so kann man die letztere Gleichung auch schreiben:

$$x = \sqrt{2ry - y^2}. \tag{14b}$$

§ 12.

Die Ellipse.

Die Ellipse ist eine Kurve, in welcher die Summe der Abstände jedes beliebigen Kurvenpunktes von zwei festen Punkten F und F′ (Brennpunkten), constant ist, also z. B. in Fig. 8 $NF' + NF = PF' + PF$.

PF′ und PF heissen radii vectores, MM′, der Lage nach bestimmt durch die Brennpunkte F und F′, heisst die grosse Axe, ihr Halbirungspunkt A der Mittelpunkt, die in A errichtete Senkrechte NN′ die kleine Axe der Ellipse. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte heisst die Excentricität. Die doppelte

Ordinate in einem der Brennpunkte, bezogen auf die grosse Axe als Abscissenaxe, der Parameter der Ellipse.

Bezeichnen a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe, e die Excentricität, z und z′ die Radien vectoren, so folgt aus der Grundeigenschaft der Ellipse ohne Weiteres:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ z + z' = 2\,a. \\ 2)\ e = \sqrt{a^2 - b^2},\ (\text{da } F\,N = a). \end{array}\right\} \qquad (15)$$

§ 13.

Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Es ist (Fig. 8):

$$z = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$
$$z' = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

also $z + z'$, d. i. nach (15) $2\,a = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} + \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$.

$$2\,a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

oder wenn wir quadriren:

$$4\,a^2 + y^2 + e^2 + x^2 - 2\,e\,x - 4\,a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 + 2\,e\,x.$$

oder: $\quad a^2 - e\,x = a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$.

und wenn wir nochmals quadriren:

$$a^4 - e^2\,x^2 - 2\,a^2\,e\,x = a^2\,y^2 + a^2\,e^2 + a^2\,x^2 - 2\,a^2\,e\,x$$

oder $\quad a^2\,(a^2 - e^2) = a^2\,y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2$

oder, da $a^2 - e^2 = b^2$, nach (15):

$$\mathbf{a^2\,y^2 + b^2\,x^2 = a^2\,b^2}. \qquad (16)$$

§ 14.

Scheitelgleichung der Ellipse.

Verlegt man den Coordinatennullpunkt an einen Endpunkt der grossen Axe, so ändern sich nur die Abscissen um die grosse Halbaxe, während die Ordinaten unverändert bleiben. Die Mittelpunktsgleichung geht daher, indem man statt x den Werth $(x - a)$ setzt, über in:

$$a^2\,y^2 = b^2\,(2\,a\,x - x^2). \qquad (16a)$$

Das doppelte Vorzeichen, welches sich aus dieser quadratischen Gleichung für y ergiebt, deutet an, dass für jede Abscisse zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten existiren. Die Kurve liegt also zu beiden Seiten der Abscissenaxe.

Zusatz. Für $b = a$ gehen die Gleichungen der Ellipse in die des Kreises über. Dieser ist also eine Ellipse, deren Excentricität $= 0$. (Vergl. 14a.)

§. 15.

Parabel. Gleichung derselben.

Mit dem Namen Parabel bezeichnet man eine Kurve, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte (Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (Leitlinie, Direktrix) gleiche Abstände hat. (Fig. 9.) $B\,P = P\,F$.

Liegt der Coordinatennullpunkt im Scheitel A, so ist für den Punkt P $A\,Q = x$, $P\,Q = y$.

Nach der charakteristischen Eigenschaft der Parabel ist, wenn p den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix bezeichnet:

1) $AF = \frac{1}{2}p$.

2) $PF = BP = FQ + p$.

ferner $y^2 = PF^2 - FQ^2$

$= (FQ + p)^2 - FQ^2 = p^2 + 2FQ \cdot p$.

$= p^2 + 2(x - \frac{1}{2}p)p$

oder: $$y^2 = 2px. \tag{17}$$

Parameter: Die Abscisse des Brennpunktes ist $= \frac{1}{2}p$, daher die zugehörige Ordinate, d. h. der halbe Parameter der Parabel nach (17): $y^2 = p^2$, also $y = p$, also der Parameter, (d. i. $2y$) $= 2p$.

§ 16.

Hyperbel. Gleichung derselben.

Die Hyperbel ist eine Kurve von der Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände (radii vectores) jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten, (Brennpunkten), constant ist.

In Fig. 10 ist also für jeden beliebigen Punkt P der Kurve $F'P - FP$ constant. Wir setzen dieselbe $= 2a$.

Nehmen wir FF' als Abscissenaxe, die in ihrem Halbirungspunkt A errichtete Senkrechte als Ordinatenaxe, dann ist, wenn $FF' = e$ gesetzt wird, analog § 13:

$$PF' - PF = 2a = \sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2}$$

$$2a + \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = \sqrt{y^2 + (x+e)^2}.$$

woraus sich ergiebt: (analog § 13)

$$a^2y^2 - (e^2 - a^2)x^2 = -a^2(e^2 - a^2)$$

und wenn man $e^2 - a^2 = b^2$ setzt:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

oder $$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{18}$$

Für $x = a$ wird $y = 0$, der Punkt P liegt also für $x = a$ in der Abscissenaxe, die Kurve schneidet also die Abscissenaxe in der Entfernung a vom Coordinatennullpunkte. Dieser Durchschnittspunkt ist der der Coordinatenaxe nächste Punkt der Kurve, denn für $x < a$ wird die Wurzel imaginär. Für $x = -a$ wird y ebenfalls $= 0$, mithin wird die Abscissenaxe in ihrem negativen Theile ebenfalls von der Kurve geschnitten, diese besteht also aus zwei getrennten Theilen. Die Entfernung der beiden Punkte M und M′ ist $= 2a$.

Wir werden dieses Capitel im Abschnitt IV mit Anwendung der im nächsten Abschnitt III zu behandelnden Differentialrechnung fortsetzen.

III. Differentialrechnung.

§ 17.

Erläuterungen.

Bedeutet $y = f(x)$ dass y eine Funktion von x sei, wobei wir uns also unter $f(x)$ irgend einen Ausdruck, in welchem x in irgend einer Verbindung vorkommt, zu denken haben, (vergl. Abschn. II § 7), so wird, sobald man x um eine gewisse

Grösse ändert, auch y eine Aenderung erleiden. Bezeichnen wir die Grössen, um welche x und y sich ändern, mit $\triangle x$ und $\triangle y$, so ist:

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)$$
$$\triangle y = f(x + \triangle x) - y$$
$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$$

und das Verhältniss der Aenderungen (Differenzen genannt)

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \tag{19}$$

Das Verhältniss $\triangle y : \triangle x$ heisst Differenzenquotient. Je mehr sich die Differenzen $\triangle y$ und $\triangle x$ der Null nähern, um so mehr nähert sich der Bruch $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ einem ganz bestimmten Werthe, und geht in diesen über, sobald $\triangle y$ und $\triangle x$ der Null gleich werden.

Hat man z. B. die Funktion:

$$y = a x^2$$

so ist
$$y + \triangle y = a(x + \triangle x)^2$$
$$= a x^2 + 2 a x \triangle x + a \triangle x^2$$
$$\triangle y = 2 a x \triangle x + a \triangle x^2$$

also
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2 a x + a \triangle x.$$

Je mehr nun $\triangle x$ sich der Null nähert, um so mehr nähert sich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ der Grenze $2ax$, und geht in diese über, sobald $\triangle x$ in Null übergeht.

Sind die Differenzen $\triangle x$ und $\triangle y$ unendlich klein, so nennt man sie Differentiale und bezeichnet sie mit dx und dy. Das Symbol $\frac{dy}{dx}$ liest man „Differentialquotient" von y nach x. Die Grösse x heisst die „Veränderliche" der Funktion f(x).

Unter dem Differentialquotienten einer Funktion nach ihrer Veränderlichen versteht man also nach Obigen die Grenze, welcher der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ sich ohne Ende nähert, wenn man die Aenderung $\triangle x$ sich der Null nähern lässt. Der Differentialquotient nimmt zwar die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, hat aber, wie obiges Beispiel zeigt, doch einen ganz bestimmten Werth.

Beispiele:

1) Ist $y = a x + b$, so ist $y + \triangle y = a(x + \triangle x) + b$ $= a x + a \triangle x + b$, folglich $\triangle y = a \triangle x$, also $\frac{\triangle y}{\triangle x} = a$, für jeden beliebigen Werth der Aenderung $\triangle x$, mithin auch $\frac{dy}{dx} = a$, d. i. $\frac{d(ax + b)}{dx} = a$.

2) Für $y = a + x$ findet man auf demselben Wege $\frac{dy}{dx}$, d. i. $\frac{d(a + x)}{dx} = 1$.

3) Ist $y = a - x$, so ist $\frac{dy}{dx} = -1$.

4) „ $y = \pm x$, so ist $\frac{dy}{x} = \pm 1$.

5) Ist $y = a\,x$, so ist $\frac{d\,y}{d\,x} = a$.

6) Für $y = \frac{a}{x}$ ist $\frac{d\,y}{d\,x}$, d. i. $\frac{d\frac{a}{x}}{d\,x} = -\frac{a}{x^2}$.

7) „ $y = \frac{x}{a}$ „ $\frac{d\,y}{d\,x}$, d. i. $\frac{d\frac{x}{a}}{d\,x} = \frac{1}{a}$.

Wir fügen hierzu unser obiges Beispiel:

8) Für $y = a\,x^2$ ist $\frac{d\,y}{d\,x}$, d. i. $\frac{d\,a\,x^2}{d\,x} = 2\,a\,x$.

§ 18.

Differentiation der Summe zweier Funktionen.

Hat man $y = f(x) + \varphi(x)$

so ist
$$y + \triangle y = f(x + \triangle x) + \varphi(x + \triangle x)$$
$$\triangle y = f(x + \triangle x) + \varphi(x + \triangle x) - [f(x) + \varphi(x)]$$
$$= f(x + \triangle x) - f(x) + [\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)]$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} + \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

oder nach (19)
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} + \frac{\triangle \varphi(x)}{\triangle x}$$

oder wenn man zur Grenze übergeht:
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,f(x)}{d\,x} + \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}. \tag{20}$$

D. h. der Differentialquotient der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Beispiel: Ist $y = a\,x^2 + b\,x$, so ist nach diesem Satze $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,a\,x^2}{d\,x} + \frac{d\,b\,x}{d\,x}$. Nach § 17, Beispiel 8, ist $\frac{d\,a\,x^2}{d\,x} = 2\,a\,x$, und nach Beispiel 5: $\frac{d\,b\,x}{d\,x} = b$, folglich $\frac{d\,y}{d\,x}$, d. i. $\frac{d\,(a\,x^2 + b\,x)}{d\,x} = 2\,a\,x + b$.

Aufgabe: Um wieviel ändert sich die Funktion $y = a\,x^2 + b\,x$, wenn x um den kleinen Betrag $d\,x$ geändert wird?

Nach obigem Beispiel ist: $\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,a\,x + b$, also $d\,y = (2\,a\,x + b)\,d\,x$.

Man findet also die Aenderung der Funktion, indem man die Aenderung der Variabeln mit dem Differentialquotienten der Funktion multiplizirt.

Zusatz: Für $y = a + x$ ist nach obigem Satze:
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,a}{d\,x} + \frac{d\,x}{d\,x}.$$

Nach § 17, Beispiel 2, ist
$$\frac{d\,(a + x)}{d\,x} = 1$$

folglich
$$\frac{d\,a}{d\,x} + \frac{d\,x}{d\,x} = 1$$
$$\frac{d\,a}{d\,x} + 1 = 1$$

folglich
$$\frac{d\,a}{d\,x} = 0.$$

D. h. der Differentialquotient einer Constanten ist $= 0$. Dies folgt auch schon daraus, dass bei einer Constanten von einer Aenderung keine Rede sein kann, mithin $d\,a = 0$ sein muss.

§ 19.

Differentiation der Differenz zweier Funktionen.

Man erhält ganz analog § 18 den Satz:

Der Differentialquotient der Differenz zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen, also

$$\frac{d\,[f(x) - \varphi(x)]}{d\,x} = \frac{d\,f(x)}{d\,x} - \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}. \tag{21}$$

§ 20.

Differentiation des Produkts zweier Funktionen.

1) Ist $\quad y = f(x) \cdot \varphi(x)$

so ist $\quad \triangle y = f(x + \triangle x) \cdot \varphi(x + \triangle x) - f(x) \cdot \varphi(x)$

oder wenn man rechts $f(x + \triangle x)\,\varphi(x)$ erst addirt und wieder subtrahirt:

$$\begin{aligned} \triangle y &= f(x + \triangle x)\,\varphi(x) - f(x)\,\varphi(x) + f(x + \triangle x)\,\varphi(x + \triangle x) - f(x + \triangle x)\,\varphi\,x \\ &= \varphi(x)\,[f(x + \triangle x) - f(x)] + f(x + \triangle x)\,[\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)] \end{aligned}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \varphi(x)\,\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} + f(x + \triangle x)\,\frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

oder wenn wir zur Grenze übergehen:

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d\,f(x)\,\varphi(x)}{d\,x} = \varphi(x)\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + f(x)\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} \tag{22}$$

D. h. Der Differentialquotient des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte aus jeder Funktion in den Differentialquotienten der anderen.

In anderer Schreibweise lautet die Gleichung:

$$d\,(f(x)\,\varphi(x)) = \varphi(x)\,d\,f(x) + f(x) \cdot d\,\varphi(x). \tag{22a}$$

Folgerung: $d\,(a\,f(x)) = a\,d\,f(x) + f(x)\,d\,a$, oder, da $d\,a = 0$ (§ 18 Zusatz): $d\,(a\,f(x)) = a\,d\,f(x)$.

2) Ist ein Produkt von mehreren Faktoren zu differentiiren, z. B. $y = u \cdot v \cdot w$, worin u, v, w Funktionen von x bezeichnen sollen, so ist nach 1)

$$\frac{d\,y}{d\,x} = v \cdot w\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,\frac{d\,(v \cdot w)}{d\,x}$$

oder da $\dfrac{d\,(v \cdot w)}{d\,x} = v\,\dfrac{d\,w}{d\,x} + w\,\dfrac{d\,v}{d\,x}$

$$\frac{d\,y}{d\,x}, \text{ d. i. } \frac{d\,(u\,v\,w)}{d\,x} = v\,w\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,w\,\frac{d\,v}{d\,x} + u\,v\,\frac{d\,w}{d\,x} \tag{22b}$$

oder auch

$$\frac{\dfrac{d\,u\,v\,w}{d\,x}}{u\,v\,w} = \frac{\dfrac{d\,u}{d\,x}}{u} + \frac{\dfrac{d\,v}{d\,x}}{v} + \frac{\dfrac{d\,w}{d\,x}}{w}. \tag{22c}$$

§ 21.

Differentiation des Quotienten zweier Funktionen.

Sei $\quad y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

so ist $\quad y\,\varphi(x) = f(x)$

folglich $$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = y\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \varphi(x)\frac{d\,y}{d\,x} \quad \text{(nach § 20)}$$
$$= \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \varphi(x)\frac{d\,y}{d\,x}$$

also $$\varphi(x)\frac{d\,f(x)}{d\,x} = f(x)\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + [\varphi(x)]^2\frac{d\,y}{d\,x}$$

woraus folgt:
$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d\,\frac{f(x)}{\varphi(x)}}{d\,x} = \frac{\varphi(x)\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} - f(x)\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}}{[\varphi(x)]^2} \tag{23}$$

oder in anderer Schreibweise:
$$d\,\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\,d\,f(x) - f(x)\,d\,\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2} \tag{33a}$$

D. h. das Differential eines Quotienten ist gleich dem Produkt aus dem Differential des Zählers in den Nenner, vermindert um das Produkt aus dem Differential des Nenners in den Zähler und dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Ist der Zähler constant, so hat man:
$$\frac{d\,\frac{a}{f(x)}}{d\,x} = -\frac{a\,d\,\frac{f(x)}{d\,x}}{[f(x)]^2}$$

Ist $f(x)$ gleich x, so hat man also:
$$\frac{d\,\frac{a}{x}}{d\,x} = -\frac{a}{x^2} \quad \text{(vergl. § 17, Beispiel 6).} \tag{24}$$

Ist der Nenner constant, so erhält man für $f(x) = x$:
$$\frac{d\,\frac{x}{a}}{d\,x} = \frac{1}{a}, \quad \text{(vergl. § 17, Beispiel 7).} \tag{25}$$

§ 22.

Differentiation der Potenz zweier Funktionen.

1) Sei $y = [f(x)]^n = f(x)\,f(x)\,f(x) \text{ - - - - n mal.}$, so ist nach 22c
$$\frac{\frac{d\,y}{d\,x}}{[f(x)]^n} = \frac{\frac{d\,[f(x)]^n}{d\,x}}{[f(x)]^n} = \frac{\frac{d\,f(x)}{d\,x}}{f(x)} + \frac{\frac{d\,f(x)}{d\,x}}{f(x)} + \text{- - - -}$$
$$= n\,\frac{\frac{d\,f(x)}{d\,x}}{f(x)}$$

folglich $$\frac{d\,[f(x)]^n}{d\,x} = n\,[f(x)]^{n-1}\,\frac{d\,f(x)}{d\,x}\,^{*)} \tag{26}$$

oder in anderer Schreibweise:
$$d\,[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}\,d\,f(x)\,^{*)} \tag{26a}$$

Beispiel: Nach (22) ist $\frac{d\,(a\,x)^2}{d\,x} = 2\,a\,x\,.\,a = 2\,a^2\,x.$

---

*) Bei der Ableitung dieser Formel ist ein positives ganzes n vorausgesetzt. Dass die Formel auch für ein negatives und gebrochenes n gilt, lässt sich zeigen, indem man $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$ setzt, bezw. wenn man statt $y = [f(x)]^{\frac{p}{q}}$ schreibt $y^q = [f(x)]^p$. und hierauf Formel (26) anwendet, mit welcher Andeutung wir uns hier begnügen wollen.

Aufgabe: Um wieviel ändert sich die Hypotenuse y eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Catheten a und x, wenn sich die Cathete x um den sehr kleinen Betrag dx ändert?

Es ist $y^2 = a^2 + x^2$, also nach § 18

$dy^2 = da^2 + dx^2$, oder nach § 18 Zusatz und (26a):

$2y\,dy = 2x\,dx$

$$dy = \frac{x}{y}\,dx = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx.$$

2) Obige Gleichungen (26) und (26a) finden auch Anwendung bei der Differentiation einer Wurzel, denn es ist

$\sqrt[n]{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{n}}$. Danach ist z. B. $\dfrac{d\sqrt{x}}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

oder
$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{27}$$

§ 23.

Funktion einer Funktion.

Hat man
$$z = f(y)$$
$$y = \varphi(x)$$
so ist auch z eine Funktion von x, und es kann die Aufgabe entstehen, z nach x zu differentiiren. Setzen wir
$$z = F(x)$$
so werden bei einer Aenderung von x um $\triangle x$ gleichzeitig z und y sich ändern, und man hat:

$$\triangle z = f(y + \triangle y) - f(y)$$
$$\triangle y = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)$$

also
$$\frac{\triangle z}{\triangle y} = \frac{f(y + \triangle y) - f(y)}{\triangle y}$$

und
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

mithin
$$\frac{\triangle z}{\triangle y} \cdot \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(y + \triangle y) - f(y)}{\triangle y} \cdot \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

oder
$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = \frac{f(y + \triangle y) - f(y)}{\triangle y} \cdot \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

und wenn man zur Grenze übergeht:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\,f(y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$\mathbf{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}} \tag{28}$$

Von dieser Formel kann man häufig Gebrauch machen, um sich die Operation des Differentiirens zu erleichtern.

Beispiel 1: $y = (a + bx)^2$. Setzt man $a + bx = z$, also $y = z^2$, so ist $\dfrac{dy}{dz} = 2z$, $\dfrac{dz}{dx} = b$, also $\dfrac{dy}{dx} = 2bz = 2b(a + bx)$.

Beispiel 2: $y = \dfrac{1}{\sqrt{a - bx}}$. Setzt man $a - bx = z$, also $y = z^{-\frac{1}{2}}$, so ist $\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}$, $\dfrac{dz}{dx} = -b$, also $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{b}{2\sqrt{z^3}}$.

§ 24.

Funktionen zwischen zwei Veränderlichen.

Hat man eine von zwei Veränderlichen abhängige Funktion

$$z = f(x, y)$$

so ist: $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y)$

oder für $x + \triangle x = x_1$, $y + \triangle y = y_1$:

$$\triangle z = f(x_1, y_1) - f(x, y)$$

oder wenn man rechts $f(x, y_1)$ erst subtrahirt und dann addirt:

$$\triangle z = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\triangle x} \cdot \triangle x + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y.$$

Je mehr sich nun $\triangle y$ der Null nähert, um so mehr nähert sich y_1 der Grenze y. Beim Uebergange zur Grenze wird also y_1 in y übergehen. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man schon vor dem Uebergange zur Grenze y für y_1 setzt, dann aber beim Uebergange y als Constante betrachtet, so dass es als solche beim Uebergange unverändert bleibt. Wir werden daher statt des Ausdrucks $\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\triangle x}$ den Differenzenquotienten $\frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{\triangle x}$ zur Grenze überführen und dabei y als Constante betrachten. Ebenso können wir im zweiten Gliede rechts x als Constante betrachten, und erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy. \tag{29}$$

D. h. um das Differential dz der Funktion zu erhalten, differentiirt man dieselbe erst nach x, indem man y als Constante betrachtet, sodann nach y, indem man x als Constante betrachtet. Mit den so erhaltenen Differentialquotienten multiplicirt man die Differentiale der Veränderlichen und addirt die Produkte. Die so gebildeten Differentialquotienten heissen **partielle** Differentialquotienten und werden als solche symbolisch durch ein rundes ∂ bezeichnet. Die Ausdrücke $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$ und $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ heissen **partielle** Differentiale von z nach x und y. Das vollständige Differential dz ist also gleich der Summe der partiellen Differentiale nach den einzelnen Veränderlichen.

§ 25.

Unentwickelte Funktionen.

Ist eine Funktion noch unentwickelt, ist z. B. y nicht in der Form $y = f(x)$, sondern in der noch unentwickelten Form $f(x, y) = 0$ gegeben, in welcher uns also der Werth von y noch unbekannt ist, so ist zwar y gleichwohl eine Funktion von x, doch gestaltet sich die Operation des Differentiirens in diesem Falle etwas anders. Ist $0 = f(x, y)$, so ist nach (29)

$$d\,0, \text{ d. i. } 0 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \tag{30}$$

D. h. man differentiirt unentwickelte Funktionen, indem man dieselben partiell erst nach x und dann nach y differentiirt und die partiellen Differentialquotienten nach obiger Formel zusammensetzt.

Beispiel: $f(x, y) = a x^2 + b y + c = 0$. 1) $\frac{\partial f(x, y)}{d x} = 2 a x$. 2) $\frac{\partial f(x, y)}{d y} = b$,

$$\text{also } \frac{d y}{d x} = -\frac{2 a x}{b}.$$

Von obiger Formel (30) macht man häufig Gebrauch, um in der entwickelten Form vorkommende Wurzeln etc. zu vermeiden.

Beispiel: $y = x\sqrt{x}$, also $y^2 - x^3 = 0$.

$$1)\ \frac{d f(x, y)}{d x} = -3 x^2 \quad 2)\ \frac{d f(x, y)}{d y} = 2 y,\ \text{also } \frac{d y}{d x} = \frac{3 x^2}{2 y}.$$

Beispiele zur Uebung in der Anwendung der bisherigen Paragraphen.

1) $y = x\sqrt{1+x}$.

$$\frac{d y}{d x} = x\,\frac{d\sqrt{1+x}}{d x} + \sqrt{1+x}\cdot\frac{d x}{d x} = x \times \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d(1+x)}{d x} + \sqrt{1+x} \times 1$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \times 1 + \sqrt{1+x} = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}},\ \text{oder einfacher nach § 25:}$$

2) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{d y}{d x} = -\frac{a\ 3}{x^2+\sqrt{a^2+x^2}}$	4) $y = \frac{1-x}{1+x}$	$\frac{d y}{d x} = -\frac{2}{1+x^2}$
3) $y = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$	$\frac{d y}{d x} = -4 x^3$	5) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{d y}{d x} = \frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

6) $y^2 = a x - x^2$. Setzt man a) $y^2 = z$, so ist b) $z = a x - x^2$, also $\frac{d z}{d x} = a - 2 x$, oder da nach

a) $d z = 2 y\, d y$, so ist: $2 y \frac{d y}{d x} = a - 2 x$, also $\frac{d y}{d x} = \frac{a - 2 x}{2 y} = \frac{a - 2 x}{2(a x - x^2)}$

7) $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$. Es ist: $a^2\, 2 y\, d y = -b^2\, 2 x\, d x$, also $\frac{d y}{d x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

8) $z^2 = x^2 + y^2$. Hier kommt § 24 in Betracht. Es ist $2 z\, d z = 2 x\, d x + 2 y\, d y$

$$\text{also } d z = \frac{x\, d x + y\, d y}{z} = \frac{x\, d x + y\, d y}{x^2 + y^2}.$$

§ 26.
Wiederholte Differentiation.

Enthält der Differentialquotient einer Funktion von x ausser Constanten auch noch die Variable x, so ist derselbe wiederum eine Funktion von x, und man kann mit ihm die Operation des Differentiirens wiederholen. Den so erhaltenen Differentialquotienten nennen wir den 2. Differentialquotienten, (die 2. Abgeleitete). Entsprechend kann man den 3., 4. etc. Differentialquotienten bilden. Ist $y = f(x)$, so bezeichnet man den ersten, 2., 3. .. Differentialquotienten dieser Funktion mit $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, oder man braucht das Symbol $\frac{d y}{d y}$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$, $\frac{d^3 y}{d x^3}$ - - - . Zu dieser Bezeichnung ist man auf folgende Weise gekommen:

Ist $\frac{d y}{d x} = f'(x)$, so erhält man durch Differentiation, indem man $d x$ als Constante ansieht; (§ 21):

$$\frac{d\frac{d y}{d x}}{d x} = \frac{1}{d x} \cdot \frac{d(d y)}{d x} = \frac{d^2 y}{d x^2} = f''(x).$$

und indem man $\frac{dy}{dx^2}$ nochmals differentiirt, analog:

$$\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass die Exponenten von d, d^2, d^3 - - - nur das 1., 2., 3. etc. Differential andeuten, nicht etwa Potenzen von d bezeichnen können.

Beispiel: $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = n\,x^{n-1} \quad \text{(vergl. § 22)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,3\,.\,2\,.\,1.$$

Alle noch höheren Differentialquotienten sind hier $= 0$.

§ 27.

Mac Laurins Theorem.

Wir denken uns f(x) in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, nämlich

$$1)\ f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

worin A, B, C noch näher zu bestimmende Constanten bezeichnen. Verstehen wir unter f(0) denjenigen Werth von f(x), welchen diese Funktion annimmt, wenn in derselben $x = 0$ gesetzt wird, so ist

$$f(0) = A.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) erhalten wir (§ 18 u. 22):

$$2)\ \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x) = B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + \ldots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f'(0) = B.$$

Durch Differentiation von 2) wird erhalten

$$3)\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = 2\,C + 2\,.\,3\,D\,x + 3\,.\,4\,E\,x^2 + \ldots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f''(0) = 2\,C$$

und analog $\qquad f'''(0) = 2\,.\,3\,D$

etc.

Mithin bestimmen sich die Coefficienten A, B, C . . . wie folgt:

$$A = f(0)$$

$$B = f'(0)$$

$$C = f''(0)\,.\,\frac{1}{1\,.\,2}$$

$$D = f'''(0)\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}$$

wodurch aus Gl. 1) erhalten wird:

$$\mathbf{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)\,x}{1} + \frac{f''(0)\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{f'''(0)\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots} \qquad (31)$$

In Worten: Lässt sich eine Funktion von x nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln, so ist deren constantes Glied gleich demjenigen Werthe der Funktion, den dieselbe für $x = 0$ annimmt, ihre Coofficienten aber gleich denjenigen Werthen des 1., 2., 3. . . . Differentialquotienten, welche diese für $x = 0$ annehmen, dividirt durch die Facultäten der aufsteigenden Zahlen von 1 ab.

Beispiel im folgenden §.

§ 28.

Binomialreihe.

Hat man $f(x) = (a + x)^n$

so ist $f'(x) = n (a + x)^{n-1}$

$f''(x) = n (n - 1) (a + x)^{n-2}$

. . .

$f^k(x) = n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - k_{+1}) (a + x)^{n-k}$

also: $f(0) = a^n$

$f'(0) = n a^{n-1}$

$f''(0) = n (n - 1) a^{n-2}$

. . .

$f^k(0) = n (n - 1) (n - 2) \ldots (n - (k_{+1})) a^{n-k}$

also nach (31)

$$(a + x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} a^{n-2} x \frac{n(n-1) \ldots (n - (k_{+1}))}{1 \,.\, 2 \ldots (k_{-1}) k} \,.\, a^{n-k} x^k \quad (32)$$

die bekannte Binomialreihe.

§ 29.

Differentiation von Exponentialgrössen.

Wir lassen in der Funktion

$$y = a^x$$

den Exponenten x um die Grösse k wachsen und setzen

$$y_1 = a^{x+k}.$$

oder

$$1) \; y_1 = a^x [1 + (a - 1)]^k$$

oder nach (32)

$$y_1 = a^x \left\{ 1 + k (a - 1) + \frac{k (k - 1)}{1 \,.\, 2} (a - 1)^2 + \frac{k (k - 1) (k - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (a - 1)^3 + \ldots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + k (a - 1) + \frac{k^2 - k}{1 \,.\, 2} (a - 1)^2 + \frac{k^3 - k^2 + 2k}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (a - 1)^3 + \ldots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + k (a - 1) + \frac{k^2 (a - 1)^2}{1 \,.\, 2} - \frac{k (a - 1)^2}{2} + \frac{(k^3 - k^2)(a - 1)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{k}{3} (a - 1)^3 + \ldots \right\}$$

Bezeichnen wir hierin die Coofficienten aller derjenigen Glieder, welche k in höherer als in der 1. Potenz enthalten, mit p, q, r etc., so lautet die Gleichung:

$$y_1 = a^x \left\{ 1 + k (a - 1) - \frac{k}{2} (a - 1)^2 + \frac{k}{3} (a - 1)^3 - \ldots + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \ldots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots \right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \ldots \right\}$$

$$= a^x + a^x \left\{ \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots \right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \ldots \right\}$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung $y = a^x$ und dividirt gleichzeitig durch k, so entsteht:

$$\frac{y_1 - y}{k} = a^x \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots \right] + p k + q k^2 + r k^3 + \ldots$$

und wenn man zur Grenze übergeht, indem man $k = d x = 0$ setzt:

$$2) \ \frac{d y}{d x} = a^x \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots \right]$$

oder wenn man die Klammergrösse = A setzt:

$$3) \ \frac{d y}{d x} \text{ d. i. } \frac{d a^x}{d x} = a^x A.$$

Da A eine Constante, so folgt hieraus ohne Weiteres:

$$3a) \begin{cases} \dfrac{d^2 a^x}{d x^2} = a^x A^2 = f''(x) \\ \dfrac{d^3 a^x}{d x^3} = a^x A^3 = f'''(x) \end{cases}$$

etc.

Um die Constante A zu bestimmen, entwickeln wir a^x nach der Mac Laurinschen Reihe und erhalten:

$$\begin{array}{lll} & f(x) = a^x & \text{also } f(0) = 1 \\ \text{und nach 3)} & f'(x) = a^x A & \text{also } f'(0) = A \\ & f''(x) = a^x A^2 & \text{also } f''(0) = A^2 \\ & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

also $$a^x = 1 + A x + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

und wenn man hierin $x = \frac{1}{A}$ setzt:

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

oder 4) $a^{\frac{1}{A}} = 2{,}71828.$

Diese Zahl wird allgemein mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Nach 4) ist $\sqrt[A]{a} = e$, also $a = e^A$, folglich

$$5) \ A = \frac{\log a}{\log e}$$

für jede beliebige Logarithmenbasis. Nimmt man diese = e, — (natürliches Logarithmensystem), — so ist

$$A = \frac{\overset{e}{\log}\, a}{\overset{e}{\log}\, e} = \overset{e}{\log}\, a = \log \text{nat}\, a \ (\text{logarithmus naturalis } a)$$

also nach 3) $$\frac{\mathbf{d\, a^x}}{\mathbf{d\, x}} = \mathbf{a^x \log nat\, a.} \qquad (33)$$

Folgerung: $\frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x$.

Um vom natürlichen Logarithmus auf den Logarithmus eines anderen Systems überzugehen, hat man nach 5)

$$\log \text{nat}\, a = \frac{\log a}{\log e}$$

also $\log a = \log \text{nat}\, a \log e$.

oder für $\log e = M$

$$\log a = \log \text{nat}\, a \,.\, M. \tag{34}$$

Für das Briggische System ist $\overset{10}{\log}\, e = M = 0{,}4342945$. Diese Zahl heisst der Modulus des briggischen Logarithmensystems.

§ 30.

Differentiation logarithmischer Grössen.

Ist $y = \overset{b}{\log}\, x$

so ist $x = b^y$

$$\frac{d\,x}{d\,y} = b^y \log \text{nat}\, b\,.$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{b^y \log \text{nat}\, b}$$

oder da $b^y = x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d \overset{b}{\log}\, x}{d\,x} = \frac{1}{x \log \text{nat}\, b} \tag{35}$$

Folgerung: $$\frac{\mathbf{d \log nat\, x}}{\mathbf{d\,x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \tag{36}$$

oder $$\mathbf{d \log nat\, x} = \frac{\mathbf{d\,x}}{\mathbf{x}}. \tag{37}$$

Für ein **beliebiges** System lautet diese Gleichung, wenn M den Modulus dieses Systems bezeichnet, da nach (34) $\log x = M \log \text{nat}\, x$:

$$d \log x = M \frac{d\,x}{x}. \tag{38}$$

Die Aenderung des Logarithmus ist also, so lange es sich um sehr kleine Aenderungen, (Differentiale), handelt, der Aenderung der Grundzahl proportional. Hierauf beruht die Einrichtung der Interpolationstäfelchen in den Logarithmentafeln.

§ 31.

Differentiation goniometrischer Funktionen.

1) **Analytisches Winkelmass:** Wir haben in der Elementarmathematik einen Winkel in Graden, Min. und Sek. ausdrücken gelernt, und müssen uns nun zunächst mit einem anderen Winkelmasse bekannt machen. Wir können den zum Winkel gehörigen Bogen, wie als Bruchtheil der Peripherie, so auch, da diese zum Radius in einem constanten Verhältnisse steht, als **Bruchtheil des Radius** ansehen, d. h. wir geben als Winkelmass die Länge des Bogens an, gemessen mit dem Radius als Masseinheit. Unter $x = \frac{1}{100}$ verstehen wir also einen Winkel, dessen Bogen

gleich $\frac{1}{100}$ des Radius ist. Ist der Radius = 1 m, so ist x = 0,01 m; x ist also die Bogenlänge des Winkels für den mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis. Kennen wir die Bogenlänge des Winkels x für einen mit dem Radius R geschriebenen Kreis = s, so erhalten wir die zum Winkel x gehörige Bogenlänge für den Radius $1 = \frac{s}{R}$. Man kann also einen Winkel auch ausdrücken durch das Verhältniss des Bogens zum Radius.

Haben wir in analytischem Masse $x = \frac{1}{100}$, so heisst dies nach Obigen: Der Bogen des Winkels x ist $= \frac{1}{100} R$. Da nun $2 R . \pi = 360^0$, so ist $R = \frac{360^0}{2\pi}$, also $x = \frac{1}{100} \cdot \frac{360^0}{2\pi}$ oder für $\frac{360^0}{2\pi} = \varrho^0$: $x = \frac{1}{100} \varrho^0$, d. h., um aus dem analytischen Winkelmass in Gradmass überzugehen, haben wir mit ϱ^0 zu multipliciren. Um einen in analytischem Masse ausgedrückten Winkel in Sekunden zu erhalten, haben wir zu multipliciren mit $\varrho'' = \frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 206264{,}806$. Umgekehrt erhalten wir das analytische Winkelmass eines in Sekunden ausgedrückten Winkels durch Division mit $\varrho'' = 206264{,}806$.

2) Wir können nunmehr, nach dieser kleinen Abschweifung, zur Differentiation der Winkelfunktionen übergehen:

Ist $y = \sin x$

so ist
$$\begin{aligned} y + \triangle y &= \sin (x + \triangle x) \\ &= \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x. \\ \triangle y &= \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x - \sin x \\ &= \sin x (\cos \triangle x - 1) + \cos x \sin \triangle x. \end{aligned}$$

Ist nun ein Winkel sehr klein, so kann man sehr nahe den sinus gleich dem Verhältniss des Bogens zum Radius setzen, wie man leicht begreift. Gehen also $\triangle x$ und $\triangle y$ über in dx und dy, so können wir, wenn wir dx und dy in analytischem Masse ausgedrückt denken, $\sin dx = dx$ setzen, während $\cos dx = 1$ wird. Wir erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:

$$dy = 0 + \cos x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \tag{39}$$

3) Ist
$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ &= \sin (90 - x) \end{aligned}$$

so ist nach (38)
$$\frac{d \sin (90 - x)}{d (90 - x)} = \cos (90 - x)$$

oder da nach § 18
$$d (90 - x) = - dx$$
$$- \frac{d \sin (90^0 - x)}{dx} = \cos (90 - x)$$

d. h.
$$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x. \tag{40}$$

4) Für tang x findet man durch Differentiation der Gleichung $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x \tag{41}$$

5) und analog für cot x

$$\frac{d \cot x}{d x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x). \qquad (42)$$

§ 32.

Differentiation cyclometrischer Funktionen.

Erläuterung: Man versteht unter arc sin x den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen, dessen Sinus $= x$ ist.

1) Hat man $y = \text{arc} \sin x$

so ist $\sin y = x$

also: $\frac{d x}{d y} = \cos x$

$$\frac{d y}{d x}, \text{ d. i. } \frac{d \,\text{arc} \sin x}{d x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\frac{d \,\text{arc} \sin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (43)$$

2) Analog erhält man:

$$\frac{d \,\text{arc} \cos x}{d x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (44)$$

3) Ist $\text{arc tang}\, x = y$, so ist $x = \text{tang}\, y$

also $\frac{d x}{d y} = 1 + \text{tang}^2 y, \quad \frac{d y}{d x} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y}$

oder
$$\frac{d \,\text{arc tang}\, x}{d x} = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (45)$$

und analog

4)
$$\frac{d \,\text{arc} \cot x}{d x} = -\frac{1}{1 + x^2}. \qquad (46)$$

§ 33.

Goniometrische Reihen.

1) **Aufgabe:** Sin x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln.

Es ist
$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''(0) = 1.$$

Also nach (31)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \qquad (47)$$

Analog findet man

$$2) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots . \qquad (48)$$

$$3) \quad \text{tang}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 x^5}{3.5} + \ldots . \qquad (49)$$

$$4) \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{4.5} - \ldots . \qquad (50)$$

§ 34.

Cyclometrische Reihen.

Aufgabe: arc tang x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln:

Die Reihe sei

1) $\text{arc tang}\, x = A + Bx + Cx^2 + \ldots.$

Es sind hierin nun die Coefficienten A, B, C zu bestimmen.

Für $x = 0$ folgt $\text{arc tang}\, x = 0$, d. h. $f(0) = 0$, mithin das erste Glied der Mac Laurin'schen Reihe: $A = 0$. Die übrigen Coefficienten B, C etc. entwickeln wir zweckmässiger auf einem anderen Wege: Wir differentiiren Gl. 1) und erhalten:

$$\frac{1}{1 + x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots.$$

oder wenn wir die Division links ausführen:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

oder

$$1 + 0x - x^2 + 0x^3 + x^4 + \ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

woraus wir zur Bestimmung der Coefficienten B, C, D erhalten:

$$\begin{aligned} B &= 1, & \text{mithin } B &= 1 \\ 2C &= 0 & ,, \quad C &= 0 \\ 3D &= -1 & ,, \quad D &= -\frac{1}{3} \\ E &= 0 & ,, \quad E &= 0 \end{aligned}$$

also ist nach 1)

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{51}$$

Diese Reihe kann zur Berechnung der Zahl π benutzt werden.

Es ist nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = 3{,}1415926.$$

§ 35.

Die Taylor'sche Reihe.

Lässt man in $f(x)$ die Variable x um k wachsen, so lässt sich der dadurch entstandene Werth der geänderten Funktion $f(x + k)$ durch eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von k ausdrücken. Es gehen nämlich die durch wiederholtes Differentiiren der Funktion $f(x + k)$ erhaltenen Differentialquotienten $f'(x + k)$, $f''(x + k)$ etc. für $k = 0$, über in

$$f'(0) = f'(x)$$
$$f''(0) = f''(x)$$
etc.

wodurch nach (31) erhalten wird:

$$f(x + k) = f(x) + f'(x)\frac{k}{1} + f''(x)\frac{k^2}{1.2} + f'''(x)\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \tag{52}$$

§ 36.

Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten.

Stellen wir uns die Funktion $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve vor, indem wir x als Abscisse, y als Ordinate ansehen, so können wir, indem wir für x nach und nach verschiedene Werthe einsetzen und die zugehörigen Werthe y berechnen, eine beliebige Anzahl von Punkten der Kurve erhalten und diese danach construiren. Ergeben nun die Coordinaten x und y den Punkt A, Fig. 11, $x + \triangle x$ und $y + \triangle y$ den Punkt B der Kurve, so ist $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ die trigonometrische Tangente des von der Sekante AB und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkels. Je kleiner $\triangle x$ und $\triangle y$ angenommen werden, um so mehr rückt B nach A hin, und fällt mit diesem Punkte zusammen, sobald $\triangle x$ und $\triangle y$ der Null gleich werden. In demselben Augenblicke wird die Sekante A B zur Tangente im Punkte A, die Differenzen $\triangle y$ und $\triangle x$ werden zu Differentialen, und der Werth $\frac{dy}{dx}$ stellt die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der in A an die Kurve gezogenen Tangente eingeschlossenen Winkels dar. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist also die Grenze, welcher sich das Verhältniss $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ohne Ende nähert, wenn man $\triangle y$ und $\triangle x$ sich der Null nähern lässt, sie ist gleich dem Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$.

§ 37.

Maxima und Minima.

Ist $y = f(x)$, so kann es vorkommen, dass für einen gewissen Werth von x y ein Maximum wird, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von x wird y kleiner. Ebenso kann y für einen gewissen Werth von x ein Minimum werden, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von x würde y grösser werden.

Giebt es für x einen bestimmten Werth a, Fig. 12, für welchen y ein Maximum wird, so wird y für jeden grösseren oder kleineren Werth von x abnehmen, die Funktionskurve wird also bei zunehmenden oder abnehmenden x fallen, d. h. sich der Abscissenaxe nähern. Ist x grösser oder kleiner als a, so steigt dagegen die Kurve bei zu- oder abnehmenden x, bis dieses den Werth a erreicht hat. Zugleich erkennen wir aus der Figur, dass die in einem Punkte B an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einen um so kleineren Winkel einschliessen wird, je näher B an den Culminationspunkt A heranrückt, oder je mehr sich die Abscisse x des Punktes B dem Werthe a nähert. In dem Augenblicke, in welchem B in A übergeht, wird dieser Winkel, also auch seine trigonometrische Tangente $= 0$. Wird $x > a$, so fällt die Kurve wieder, der Tangentenwinkel, und mit ihm seine trigonometrische Tangente, wird negativ. Mit anderen Worten: Ist $x < a$, so wird bei zunehmenden x der Differentialquotient der Kurvengleichung abnehmen, bis er für $x = a$ verschwindet. Bei noch weiter zunehmenden x geht er in das Bereich der negativen Grössen über. Stellen wir daher den Differentialquotienten als Funktionscurve dar, so wird diese also bei zunehmenden x fallen, Fig. 13, für $x = a$ die Abscissenaxe schneiden, und für $x > a$ auf die andere, d. h. negative Seite der Abscissenaxe übergehen. Die an diese Kurve gezogenen

Tangenten bilden mit der x Axe sämmtlich negative Winkel, deren trigonometrische Tangenten daher ebenfalls negativ sind, d. h. der Differentialquotient des Differentialquotienten, d. i. der zweite Differentialquotient der Funktion $f(x)$ ist negativ. Hieraus der Satz:

Ist die Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ ein Maximum, so ist der Differentialquotient für $x = a$ gleich 0, ($f'(a) = 0$), der zweite Differentialquotient $f''(a)$ ist negativ.

Durch ganz analoge Betrachtungen — vergl. Fig. 14a und b, — finden wir den Satz:

Ist $y = f(x)$ für einen gewissen Werth von $x = a$ ein Minimum, so ist $f'(a) = 0$, $f''(a)$ positiv.

Um den Werth von x zu bestimmen, welcher die Funktion $y = f(x)$ zum Maximum oder Minimum macht, werden wir den Differentialquotienten $f'(x) = 0$ setzen und aus der so erhaltenen Gleichung x entwickeln. Für den so gewonnenen Werth von x wird y ein Maximum, wenn $f''(x)$ negativ, ein Minimum, wenn $f''(x)$ positiv ist.

Beispiel 1: Nach § 11 ist die Scheitelgleichung des Kreises: $y^2 = 2rx - x^2$ also $2y\,dy = 2r - 2x\,dx$, woraus $\frac{dy}{dx} = r - x$ erhalten wir. Setzt man $r - x = 0$, so folgt $x = r$. Durch Differentiation der Funktion $\frac{dy}{dx} = r - x$ erhalten wir $f''(x) = -1$, $f''(x)$ ist also negativ, y wird also für $x = r$ ein Maximum.

Beispiel 2: Es sind n Punkte, $P_1\ P_2 - \ldots P_n$ durch ihre Coordinaten gegeben, gesucht ein Punkt P so, dass die Summe der Quadrate der Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten, also $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots + PP_n^2$ (Fig. 15) ein Minimum werde.

Seien die Coordinaten der gegebenen Punkte $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, ..., des gesuchten Punktes $= x, y$, dann ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$\begin{aligned} PP_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ PP_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

folglich: $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + \ldots$ Um nun diejenigen Werthe für x und y zu ermitteln, welche $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots = f(x, y)$ zum Minimum machen, differentiiren wir die Gleichung zunächst partiell nach x und erhalten:

$$1)\ \frac{\partial f(x, y)}{dx} = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$$

und setzen den Werth rechts $= 0$, also

$$2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n) = 0$$

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Nunmehr differentiiren wir dieselbe Gleichung partiell nach y, setzen den Differentialquotienten $\frac{\partial f(x, y)}{dy} = 0$, und erhalten analog:

$$y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Aus Gleichung 1) erhält man:

$$\frac{d f(x, y)}{dx} = 2nx - 2(x_1 + x_2 + \ldots)$$

$$\text{also} \quad \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = +2n, \text{ und analog } \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} = +2n.$$

Die 2. Differentialquotienten sind also positiv, woraus folgt, dass $f(x, y)$ für die obigen Werthe von x und y ein Minimum, kein Maximum wird.

§ 38.

Die unbestimmten Ausdrücke $^0/_0$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Haben wir die Funktionen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ und wird für $x = a$ sowohl $f(x)$ als auch $\varphi(x) = 0$, so nimmt der Ausdruck $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $^0/_0$ an. Es kommt dann darauf an, den durch diesen Ausdruck dargestellten Werth von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zu ermitteln.

Stellen wir die Funktionskurven für $f(x)$ und $\varphi(x)$ dar, so werden dieselben in dem durch die Abscisse $x = a$ bestimmten Punkte A die Abscissenaxe schneiden, Fig. 16. Es ist nun weiter:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x - a)\operatorname{tang}\alpha \\ z = (x - a)\operatorname{tang}\beta \end{array}\right\} \text{ also } \frac{y}{z} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}.$$

Für $x = a$ werden die Sekanten **AB** und **AC** zu Tangenten in **A**, $\operatorname{tang}\alpha$ wird gleich $f'(a)$, $\operatorname{tang}\beta$ gleich $\varphi'(a)$, also $\frac{y}{z} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ wird für $x = a$ gleich $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

2) Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so schreibe man dafür $\dfrac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Man erhält dann für $x = a$ wieder die Form $^0/_0$. Es ist also nach 1)

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}.$$

Beispiel 1) $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = f(x)$. Für $x = a$ wird diese Funktion $f(a) = 0$.

Es ist
$$\frac{\frac{d(x^3 - a^3)}{dx}}{\frac{d(x^2 - a^2)}{dx}} = \frac{3x^2}{2x}, \text{ oder für } x = a \text{ gleich } \frac{3}{2}\,a.$$

Beispiel 2): $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ nimmt für $x = 2$ die Form $^0/_0$ an, also $f(2) = {^0/_0}$. Es ist nun
$$\frac{\frac{d(x^2 - 5x + 6)}{dx}}{\frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 2)}{dx}} = \frac{2x - 5}{3x^2 - 4x - 1}, \text{ oder für } x = 2$$
gleich $-\frac{1}{3}$.

IV. Anwendung der Differentialrechnung auf analytische Geometrie.

(Fortsetzung zu Abschnitt II.)

A. Ellipse.

§ 39.

Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale.

1) Durch Differentiation der Mittelpunktsgleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

erhalten wir:

$$a^2 2 y\, d y + b^2 2 x\, d x = 0$$

woraus $$\frac{d y}{d x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Dieser Ausdruck bedeutet nach § 36 die trigonometrische Tangente des Winkels α (Fig. 17), welchen die im Punkte $P_{x, y}$ an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst. Hieraus ergiebt sich die Länge der Subtangente **A B**:

$$\text{Subt.} = y \text{ cotang } \alpha = y\left(-\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)$$

$$\text{Subt.} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$$

oder auch nach der Mittelpunktsgleichung:

$$\text{Subt.} = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{b^2 x}$$

$$\textbf{Subt.} = \frac{a^2 - x^2}{x} \qquad (53)$$

2) Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres die Abscisse des Punktes **A** (Fig. 17)

$$x_A = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2}{x}.$$

Diese Abscisse ist also nur von der Hauptaxe und von der Abscisse x des Punktes P abhängig, bleibt daher für alle über der Hauptaxe beschriebenen Ellipsen so lange constant, als x ungeändert bleibt, d. h. die Tangenten an allen diesen Ellipsen in den Punkten, welche derselben Abscisse x angehören, schneiden sich in einem und demselben Punkte **A** der verlängerten Hauptaxe. Da auch der Kreis einer dieser Ellipsen, so ergiebt sich hieraus ein einfaches Verfahren, in einem gegebenen Funkte P an die Ellipse eine Tangente zu ziehen: Man schlägt über die grosse Axe einen Kreis und verfährt nach Anleituug der Figur 17.

3) Ist $PC \perp AP$, Fig. 17, so heisst P C die Normale für den Punkt P, B C die Subnormale. Man findet auf demselben Wege, auf welchem wir zur Subtangente gelangten:

$$\textbf{Subnorm.} = \frac{b^2}{a^2} x. \qquad (54)$$

§ 40.

Quadratur der Ellipse.

Schlagen wir über die grosse Axe einen Kreis, bezeichnen die einer und derselben Abscisse x angehörigen Ordinaten des Kreises und der Ellipse mit Y und y, so ist nach der Mittelpunktsgleichung des Kreises und der Ellipse:

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

also

$$y : Y = b : a,$$

für jeden beliebigen Werth von x. Denkt man sich nun unendlich viele Ordinaten in den unendlich kleinen Abständen dx gezogen, so werden Kreis und Ellipse in unendlich kleine Rechtecke $Y\,dx$ und $y\,dx$ zerlegt, und es gilt für jedes Paar derselben die Gleichung

$$y\,dx : Y\,dx = b : a.$$

Mithin verhält sich, wie sofort erhellt, die Ellipsenfläche zur Kreisfläche

$$f : F = b : a$$

$$f : a^2\pi = b : a$$

$$f = ab\pi. \tag{55}$$

B. Parabel.

§ 41.

Subtangente und Subnormale.

Die Subtangente des Punktes $P_{x,\,y}$ findet sich aus der Gleichung der Parabel auf analogem Wege, wie bei der Ellipse:

$$\textbf{1) Subtang.} = 2x \tag{56}$$

$$\textbf{2) Subnorm.} = p. \tag{57}$$

Aus Gleichung 1) ergiebt sich ein leichtes Verfahren, an die Parabel in einem gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

Aus Gl. 2) folgt, dass die Subnormale für alle Punkte constant ist, nämlich $= p$.

§ 42.

Quadratur der Parabel.

Aendert sich in der Gleichung $y^2 = 2px$ die Abscisse x um $\triangle x$ und setzt man $x + \triangle x = x_1$, so ändert sich die Ordinate y um $\triangle y$ und geht in y_1 (Fig. 18) über. Das von den Ordinaten y und y_1 eingeschlossene Trapez ist mit um so grösserer Annäherung gleich dem Flächenabschnitte, welcher von denselben Ordinaten, dem Abscissenabschnitte $\triangle x$ und dem Parabelbogen eingeschlossen wird, je kleiner man $\triangle x$ nimmt, und wird diesem Flächenabschnitte gleich, wenn $\triangle x$ gleich 0 genommen wird. In demselben Moment wird $y = y_1$. Bezeichnet f_1 diesen unendlich kleinen Flächenabschnitt, so ist also

$$1)\ f_1 = y\,dx = \sqrt{2px}\,.\,dx.$$

Ebenso finden wir den unendlich kleinen Flächenabschnitt f_2 in Fig. 18

$$2)\ f_2 = x\,dy.$$

Durch Differentiation der Parabelgleichung finden wir:

$$2\,y\,d\,y = 2\,p\,d\,x$$

$$d\,y = \frac{p\,d\,x}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

wodurch Gl. 2) übergeht in:

$$3)\ f_2 = x\,\frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x.$$

Setzen wir das uns noch unbekannte Verhältniss $f_1 : f_2 = \frac{1}{n}$, also $n\,f_1 = f_2$, so erhalten wir aus 1) und 3)

$$n\sqrt{2\,p\,x}\,.\,d\,x = \frac{p\,x}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

$$2\,n\,p\,x = p\,x$$

$$n = \frac{1}{2}.$$

Es ist also: $$f_2 = \frac{1}{2}\,f_1.$$

Da man die mit I und II bezeichneten Flächenbschnitte in Fig. 18 als Summe einer unendlichen Zahl solcher kleinen Flächenabschnitte mit der Basis $d\,x$ bezw. $d\,y$ ansehen kann, so folgt, dass die Fläche F_2 des mit II bezeichneten Abschnitts $=$ der Hälfte der Fläche F_1 des mit I bezeichneten Abschnitts sein muss. Die Summe beider Flächen ist aber gleich $x\,y$, daher

$$F_1 = \frac{2}{3}\,x\,y. \tag{58}$$

D. h. die Fläche des von den Coordinaten x und y abgegrenzten Parabelsegments ist gleich dem Rechtecke $\frac{2}{3}\,x\,y$.

C. Krümmungskreise.

§ 43.

Erläuterungen.

Zieht man in zwei Punkten A und B, Fig. 19, einer Kurve an diese Tangenten, so heisst der von diesen eingeschlossene Winkel α die Krümmung des Kurvenbogens A B. Bezeichnet s die Länge des Bogens A B, so heisst $\frac{\alpha}{s}$ die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit.

§ 44.

Krümmungsradius.

1) Ist s der Bogen eines Kreises mit dem Radius r, Fig. 20, so ist $\frac{s}{r}$ ein Mass für den Winkel β, — (vergl. § 31, 1) —, oder da $\alpha = \beta$, auch für den Winkel α. Die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit ist also $= \frac{1}{r}$. Die Reciproke des Radius ist also ein Mass für dieselbe.

Da hiernach die Krümmung nur vom Radius r abhängt, so ist dieselbe beim Kreise constant. Der Radius heisst in seiner Eigenschaft als Mass der Krümmung „Krümmungsradius“.

2) Unter der Krümmung einer Kurve in einem bestimmten Punkte P versteht man die Krümmung eines diesen Punkt enthaltenden unendlich kleinen Kurvenbogens. Sind a und b, Fig. 21, die Endpunkte dieses Bogens, d s, (Bogendifferential), dessen Länge, τ der Winkel, den die in a an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist, wie sofort erhellt, die Krümmung d τ des Bogens $\widehat{ab}$ gleich der Aenderung, welche τ erleidet, wenn der Berührungspunkt a der Tangente nach b rückt, oder wenn x und y sich um d x und d y ändern, d. h. d τ ist das Differential des Winkels τ. Die durchschnittliche Krümmung des Bogens a b ist gleich $\frac{d\tau}{ds}$. Bezeichnet r den Radius eines Kreises von gleicher Krümmung, so ist also

$$\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds}$$

$$r = \frac{ds}{d\tau}. \qquad (59)$$

Dieser Radius heisst Krümmungsradius der Kurve im Punkte P, der damit beschriebene Kreis heisst Krümmungskreis. Es ist dies also derjenige Kreis, welcher mit der Kurve im Punkte P auf eine sehr kleine Strecke a b zur Deckung gebracht werden kann. Denkt man sich in den einander unendlich nahe gelegenen Punkten a und b zu den Tangenten Senkrechte errichtet, so ist der Durchschnitt derselben der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und seine Entfernung von a und b der Krümmungsradius.

Das Differential des Bogens d s kann als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten d x und d y angesehen werden, also ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

1) $$ds = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \cdot dx$$

Ferner ist: 2) $$\tang \tau = \frac{dy}{dx}$$

also $$d \tang \tau = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

oder nach (41) 3) $$d\tau \cdot \frac{1}{\cos^2 \tau} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

$$d\tau = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

oder da $$\cos^2 \tau = \frac{\cos^2 \tau}{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \tau}{\cos^2 \tau} + 1} = \frac{1}{1 + \tang^2 \tau}$$

$$d\tau = \frac{1}{1 + \tang^2 \tau} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

daher nach 2) $$d\tau = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Setzt man 1) und 2) in (59) ein, so erhält man:

$$r = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx}$$

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{60}$$

Beispiel: Eine Kurve durch ihre Gleichung

$$y = m x^3$$

gegeben, den Krümmungsradius derselben in dem Punkte $P_{x, y}$ zu finden.

Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = 3 m x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 m x$$

also

$$r = \frac{[1+(3 m x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{6 m x} = \frac{(1+9 m^2 x^4)^{\frac{3}{2}}}{6 m x}$$

Für $x = 0$ erhalteu wir hieraus $r = \infty$.

3) Der Krümmungsradius der Parabel für den gegebenen Punkt $P_{x, y}$ lässt sich zwar leicht nach derselben Formel finden, da aber ein anderer Weg, auf welchem man zum Krümmungsradius gelangen kann, sich für die Parabel besonders einfach gestaltet, so soll derselbe hier noch erläutert werden.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normale für den Punkt P_1 seien Y_1, X_1, Fig. 22, dann ist, wenn y_1 x_1 die Coordinaten des Punktes P_1 selbst bezeichnen:

$$X_1 = x_1 + p - Y_1 \tang \tau$$

oder da $\tang \tau = \frac{p}{y_1}$, (worin p die Subnormale, vergl. (57))

$$\text{I)}\ X_1 = x_1 + p - Y_1 \frac{p}{y_1}.$$

Entsprecheud lautet die Gleichung der Normale für einen zweiten Punkt P_2 der Parabel

$$\text{II)}\ X_2 = x_2 + p - Y_2 \frac{p}{y_2}$$

Für den Durchschnittspunkt M beider Normalen muss sich aus beiden Gleichungen für die Coordinaten derselbe Werth ergeben, es ist also in beiden Gleichungen $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ zu setzen, wofür wir einfach X und Y schreiben wollen, wo also X und Y die Coordinaten des Punktes M bezeichnen. Demnach erhalten wir aus beiden Gleichungen für den Durchschnittspunkt M:

$$x_1 - Y \frac{p}{y_1} = x_2 - Y \frac{p}{y_2}$$

oder:

$$Y\left(\frac{p}{y_2} - \frac{p}{y_1}\right) = x_2 - x_1$$

$$Y p\left(\frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2}\right) = x_2 - x_1$$

$$Y = -\frac{(x_2 - x)}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_2 y_1}{p}$$

oder wenn α den von der Sehne $P_1 P_2$ und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$\text{1)}\ Y = -\frac{y_1 y_2}{p} \cot \alpha$$

Für X ergiebt sich durch Einsetzen dieses Werthes in eine der obigen Gleichungen I und II

$$\text{2)}\ X = p + x_2 + y_1 \cot \alpha.$$

Rückt nun P_2 unendlich nahe an P_1, so wird $y_1 = y_2$, die Sehne $P_1 P_2$ wird zur Tangente in P_1, α wird $= \tau$, $\tang \alpha$ wird $= \frac{p}{y}$ (dem Differentialquotienten der Parabelgleichung), Gl. 1) geht daher über in:

$$\text{3)}\ Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

und Gl. 2), da $y \cot \alpha$ gleich der Subtangente, $= 2x$ (§ 41)

$$4) \; X = p + 3x.$$

Somit haben wir die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises für den Punkt P. Aus diesen Coordinaten und aus denen des Punktes P selbst erhalten wir nach dem pythagoräischen Lehrsatze (unter Berücksichtigung des Vorzeichens von Y):

$$\varrho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2$$

$$= (p + 2x)^2 + \left(y + \frac{y^3}{p^2}\right)^2$$

oder da nach der Parabelgleichung $y^2 = 2px$, also $2x = \frac{y^2}{p}$,

$$\varrho^2 = \frac{(p^2 + y^2)^3}{p^4}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{(p^2 + y^2)^3}}{p^2}$$

worin der Zähler gleich der Normale.

Zusatz. Den kleinsten Krümmungsradius der Parabel findet man, indem man in dieser Gleichung $y = 0$ setzt:
$$r = p.$$

Da y nur für den Scheitel der Parabel $= 0$ ist, so ist der Krümmungsradius für den Scheitel der kleinste Krümmungsradius der Parabel.