Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 2. Das rechtwinklig sphärische Dreieck

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

I. Sphärische Trigonometrie.

§ 1.

Erläuterungen.

Ein von drei Bögen grösster Kugelkreise eingeschlossenes Dreieck heisst ein **sphärisches** Dreieck. Die Seiten desselben sind also Bögen grösster Kugelkreise und werden gemessen durch ihre Centriwinkel. Unter dem sin, cos etc. einer **Seite** versteht man demgemäss den sin, cos etc. des zu dieser Seite gehörigen Centriwinkels.

Unter den Winkeln des sphärischen Dreiecks versteht man die Neigungen der Ebenen der drei das Dreieck einschliessenden grössten Kugelkreise untereinander, z. B. wird der Winkel C des Dreiecks A B C, Fig. 1, erhalten, wenn man in C an die Kreise C A und C B Tangenten zieht*), oder auch, indem man in einem beliebigen Punkte D der gemeinschaftlichen Kante C M auf eben diese Kante in den Ebenen A C M und B C M Lothe, D A und D E, errichtet. Ist $\sphericalangle$ A D E bei D rechtwinklig, so heisst auch $\triangle$ A C B ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

§ 2.

Das rechtwinklig sphärische Dreieck.

Bezeichnet man die beiden Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c, die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, so finden im rechtwinklig sphärischen Dreiecke folgende Relationen statt. (Fig. 1.)

$$\text{I} \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}. \tag{1}$$

$$\text{II} \quad \cos c = \cos a \,.\, \cos b. \tag{2}$$

$$\text{III} \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}. \tag{3}$$

$$\text{IV} \quad \sin b = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} \alpha} \text{ und } \sin a = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} \beta}. \tag{4}$$

$$\text{V} \quad \cos c = \cot \alpha \,.\, \cot \beta. \tag{5}$$

$$\text{VI} \quad \sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b} \text{ und } \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}. \tag{6}$$

Beweis:

Zu I: Sind A E und E D $\perp$ B C, so ist:

$$\sin \beta = \sin \text{A E D} = \frac{\text{A D}}{\text{A E}} = \frac{\text{A M} \sin b}{\text{A M} \sin c} = \frac{\sin b}{\sin c}, \text{ also}$$

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ und analog } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$

*) Man begreift leicht, dass dieser Winkel stets grösser ist, als der von den **Sehnen** C A und C B eingeschlossene Winkel, und zwar um so mehr, je spitzere Winkel letztere mit der Kante C M bilden. Die Winkelsumme im sphär. Dreiecke ist daher stets grösser als 180°. — Vergl. § 4.

Zu II: $\cos a = \frac{E M}{M D}$, $\cos b = \frac{M D}{A M}$, also $\cos a \,.\, \cos b = \frac{E M}{A M} = \cos c.$

Zu III: $\cos \beta = \cos A E D = \frac{D E}{A E} = \frac{M E \operatorname{tang} a}{M E \operatorname{tang} c} = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}.$

Zu IV: $\operatorname{tang} \beta = \frac{A D}{D E} = \frac{D M \operatorname{tang} b}{D M \sin a} = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$ etc.

Aehnlich ist der Beweis zu V zu führen. Es folgt dann VI aus II, III und V.

§ 3.

Schiefwinklig sphärisches Dreieck.

In jedem sphärischen Dreiecke gelten die beiden Sätze:

I Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$ (7)

II Cosinussatz: $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha.$ (8)

Beweis:

Zu I: Der grösste Kugelkreis $C D = h$ (Fig. 2 a u. b) sei $\perp A B$.

Nach § 2, I ist $\sin h = \sin b \,.\, \sin \alpha, = \sin a \sin \beta$,

folglich: $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ etc.

Zu II: Im Folgenden gelten die oberen Vorzeichen für Fig. 2a, die unteren für Fig. 2b. Nach § 2 II ist:

$\cos a = \cos h \,.\, \cos q = \cos h \,.\, \cos (c \mp p)$

oder 1) $\cos a = \cos h \,.\, \cos c \,.\, \cos p \pm \cos h \sin c \,.\, \sin p.$

Ferner ist nach § 2 II

2) $\cos h \cos p = \cos b$, oder mit $\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b\, (\pm \cos \alpha)$ multiplicirt:

$\cos h \,.\, \sin p = \cos b \,.\, \operatorname{tang} b\, (\pm \cos \alpha)$

oder:

3) $\cos h \sin p = \pm \sin b \,.\, \cos \alpha.$

Durch Einsetzen von 2) und 3) in 1) erhält man:

$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha.$

Folgerung:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c.} \tag{8a}$$

§ 4.

Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess.

1) **Erklärung:** Der zwischen den Halbperipherien zweier sich schneidenden grösster Kugelkreise liegende Theil der Kugeloberfläche heisst **Kugelstreifen.** Derselbe verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 360^0.

Unter dem **sphärischen Excess** versteht man den Ueberschuss der Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks über 180^0, — vergl. die Anmerkung zu § 1.

2) **Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.** Verlängert man (Fig. 3) die Seiten A B und A C des sphär. Dreiecks A B C über B und C hinaus, so schneiden sie sich im Endpunkte D des Durchmessers A D. Es ist dann $\triangle A E F = \triangle C B D$, wegen Gleichheit der Seiten*). Ferner ist die Summe der Streifen mit den Winkeln α, β, γ:

*) Die Gleichheit der Seiten ergiebt sich daraus, dass dieselben gemeinschaftliche Ergänzungen zum Halbkreise haben, z. B. $F E + E C =$ Halbkreis, $B C + E C =$ Halbkreis, also $F E = B C$.