Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 4. Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Zu II: $\cos a = \frac{EM}{MD}$, $\cos b = \frac{MD}{AM}$, also $\cos a \,.\, \cos b = \frac{EM}{AM} = \cos c$.

Zu III: $\cos \beta = \cos AED = \frac{DE}{AE} = \frac{ME \operatorname{tang} a}{ME \operatorname{tang} c} = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}$.

Zu IV: $\operatorname{tang} \beta = \frac{AD}{DE} = \frac{DM \operatorname{tang} b}{DM \sin a} = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$ etc.

Aehnlich ist der Beweis zu V zu führen. Es folgt dann VI aus II, III und V.

§ 3.

Schiefwinklig sphärisches Dreieck.

In jedem sphärischen Dreiecke gelten die beiden Sätze:

I Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. (7)

II Cosinussatz: $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$. (8)

Beweis:

Zu I: Der grösste Kugelkreis $CD = h$ (Fig. 2 a u. b) sei $\perp AB$.

Nach § 2, I ist $\sin h = \sin b \,.\, \sin \alpha$, $= \sin a \sin \beta$,

folglich: $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ etc.

Zu II: Im Folgenden gelten die oberen Vorzeichen für Fig. 2a, die unteren für Fig. 2b. Nach § 2 II ist:

$$\cos a = \cos h \,.\, \cos q = \cos h \,.\, \cos (c \mp p)$$

oder 1) $\cos a = \cos h \,.\, \cos c \,.\, \cos p \pm \cos h \sin c \,.\, \sin p$.

Ferner ist nach § 2 II

2) $\cos h \cos p = \cos b$, oder mit $\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b\ (\pm \cos \alpha)$ multiplicirt:

$\cos h \,.\, \sin p = \cos b \,.\, \operatorname{tang} b\ (\pm \cos \alpha)$

oder:

3) $\cos h \sin p = \pm \sin b \,.\, \cos \alpha$.

Durch Einsetzen von 2) und 3) in 1) erhält man:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha.$$

Folgerung:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c.} \qquad (8a)$$

§ 4.

Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess.

1) **Erklärung:** Der zwischen den Halbperipherien zweier sich schneidenden grösster Kugelkreise liegende Theil der Kugeloberfläche heisst **Kugelstreifen.** Derselbe verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 360^0.

Unter dem **sphärischen Excess** versteht man den Ueberschuss der Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks über 180^0, — vergl. die Anmerkung zu § 1.

2) **Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.** Verlängert man (Fig. 3) die Seiten AB und AC des sphär. Dreiecks ABC über B und C hinaus, so schneiden sie sich im Endpunkte D des Durchmessers AD. Es ist dann $\triangle AEF = \triangle CBD$, wegen Gleichheit der Seiten*). Ferner ist die Summe der Streifen mit den Winkeln α, β, γ:

*) Die Gleichheit der Seiten ergiebt sich daraus, dass dieselben gemeinschaftliche Ergänzungen zum Halbkreise haben, z. B. $FE + EC =$ Halbkreis, $BC + EC =$ Halbkreis, also $FE = BC$.

$$\text{strf}\,\alpha + \text{strf}\,\beta + \text{strf}\,\gamma = \text{Halbkugel} + 2 \triangle ABC$$

oder, da die Halbkugel = strf 180°:

$$\triangle ABC = \frac{\text{strf}\,(\alpha + \beta + \gamma - 180^0)}{2}$$

oder wenn E den sphärischen Excess bezeichnet:

$$\triangle ABC = \frac{\text{strf}\,E}{2}$$

Ist E in Graden ausgedrückt, so ist strf. $\frac{E}{2} = E \times \frac{\text{Kugeloberfl.}}{2 \times 360} = \frac{4\,r^2 \pi E}{4 \times 180}$ $= \frac{r^2 \pi E}{180}$, also

$$\triangle = \frac{r^2 \pi E}{180} \qquad (9)$$

3) **Sphärischer Excess.** Aus (9) folgt, wenn nunmehr der Flächeninhalt des Dreiecks = F gesetzt wird:

$$E^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2}$$

oder in Sekunden:

$$E'' = \frac{648\,000}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2}. \qquad (10)$$

II. Analytische Geometrie.

§ 5.
Rechtwinklige Coordinaten.

Sind zwei rechtwinklig sich schneidende Gerade ihrer Lage nach gegeben, so ist jeder Punkt, (P Fig. 4), zwischen denselben seiner Lage nach bekannt, wenn seine Abstände y und x von den beiden Geraden (Axen) gegeben sind. Da jedoch 4 Quadranten vorhanden, so entsteht in Bezug auf den Punkt P eine Vierdeutigkeit, die dadurch beseitigt wird, dass man den Abständen y und x, (Coordinaten), bestimmte Vorzeichen beilegt, wie aus Fig. erhellt. Beispielsweise liegt der Punkt P mit den Coordinaten $+y$ und $-x$, (P_{+y-x}) im II. Quadranten.

Der Abstand y heisst Ordinate, x Abscisse. Die gegebenen Coordinatenaxen heissen Abscissenaxe (X Axe) und Ordinatenaxe, (Y Axe), ihr Schnittpunkt 0 heisst Coordinatennullpunkt.

§ 6.
Polarcoordinaten.

Ist die Entfernung $0P = s$ und der Winkel $X0P = \alpha$ gegeben, so ist der Punkt P ebenfalls bestimmt. Die Vierdeutigkeit in Bezug auf die Quadranten fällt hier fort. Die den Punkt P bestimmenden Elemente (s und α) heissen Polarcoordinaten. Aus ihnen lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten (Orthogonalcoordinaten) leicht herleiten, denn es ist:

$$y = s \sin \alpha, \quad x = s \cos \alpha. \qquad (11)$$