Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 9. Schnittpunkt zweier Linien

§ 7.
Gleichung einer Linie.

Hat man eine Gleichung mit zwei Unbekannten, y und x, so erhält man aus derselben für y verschiedene Werthe, wenn man für x nach und nach verschiedene Werthe einsetzt und die Gleichung nach y auflöst. Es ist also y eine von x abhängige Grösse, eine „Funktion von x“, $(y = f(x))$. Fasst man y und x als Coordinaten auf, construirt die den verschiedenen Werthen, welche man für x angenommen und für y berechnet hat, entsprechenden Punkte, indem man die Grössen x der Reihe nach vom Durchschnittspunkt zweier rechtwinklig sich schneidenden Graden aus auf einer dieser Beiden Linien, (x Axe), abträgt, und in den so gewonnenen Punkten Senkrechte gleich den zugehörigen y errichtet, so gehören alle die so construirten Punkte einer Linie (Kurve) an, deren Verlauf von der Form der Gleichung $y = f(x)$ abhängt. Die Gleichung $y = f(x)$ heisst die Gleichung dieser Kurve. Haben wir z. B. die Gleichung $y = a\,x$, setzen in dieselbe für x der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 . . . ein, so erhalten wir die zugehörigen Werthe für $y = a, 2a, 3a \ldots.$ Tragen wir die Werthe 1, 2, 3 . . . vom Nullpunkte aus auf der x Axe ab, errichten in den so erhaltenen Punkten dieser Axe Senkrechte $= a, 2a, 3a \ldots$, so gehören die Endpunkte dieser Senkrechten sämmtlich einer graden Linie an, welche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht, wie man leicht einsieht. Die Gleichung $y = a\,x$ ist also die Gleichung einer Geraden, welche die beiden Axen im Nullpunkte schneidet.

§ 8.
Gleichung der Geraden.

Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissenaxe im Punkte A (Fig. 5) unter dem Winkel α schneidet, ist, wenn c den Abstand des Punktes A vom Nullpunkte, (d. h. die Abscisse des Punktes A) bezeichnet:

$$y = (x - c) \tang \alpha$$

denn diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt P der Geraden A P. Für $\tang \alpha = a$ lautet dieselbe:

$$y = (x - c)\,a$$

oder für $-a \,.\, c = b$:

$$y = a\,x + b. \tag{12}$$

Jede Gleichung von der Form $y = a\,x + b$ stellt eine grade Linie dar. Die Grösse $b = -a\,c = -c \tang \alpha$ bedeutet den Abstand des Punktes B, in welchem die Gerade die Ordinatenaxe schneidet, vom Nullpunkte 0. Wäre c negativ, läge also A in Fig. 5 **links** von 0, so wäre $b = -a\,c$ positiv, der Durchschnitt B würde also oberhalb 0 zu liegen kommen.

§ 9.
Schnittpunkt zweier Linien.

Hat man für 2 sich schneidende Linien deren Gleichungen:

$$y_1 = a_1\,x_1 + b_1$$
$$y_2 = a_2\,x_2 + b_2$$

so wird für den Durchschnittspunkt offenbar $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$ sein. Setzen wir

$y_1 = y_2 = y$, $x_1 = x_2 = x$, so erhalten wir die Coordinaten für den Schnittpunkt beider Linien aus den zwei Gleichungen:

$$y = a_1 x + b_1$$
$$y = a_2 x + b_2$$

welche nach x und y aufzulösen sind.

§ 10.

Umformung der Coordinaten.

Gegeben seien die Coordinaten eines Punktes P, Fig. 6, bezogen auf das Coordinatensystem $0'Y'$, $0'X'$, gesucht die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das System $0\,Y$, $0\,X$. Die Neigung der Abscissenaxen beider Systeme zu einander sei α, die Coordinaten des Punktes $0'$, bezogen auf das System $0\,Y$, $0\,x$ seien a, (Abscisse), und b, (Ordinate), so ist:

$$x = 0\,S - Q\,S = a + 0'R - Q'T$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ \text{und analog}\quad y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

§ 11.

Gleichung des Kreises.

Ist der Kreismittelpunkt Nullpunkt des Coordinatensystems, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises ohne Weiteres: — vergl. Fig. 7a:

$$y^2 = r^2 - x^2 \qquad (14)$$

(Mittelpunktsgleichung.) Liegt dagegen der Nullpunkt in einem Endpunkte des Durchmessers, und betrachtet man diesen als Abscissenaxe, die Tangente im Nullpunkte als Coordinatenaxe, Fig. 7b, so ergiebt sich die **Scheitelgleichung:**

$$y^2 = r^2 - (r - x)^2$$
$$= 2\,r\,x - x^2$$
$$y = \sqrt{2\,r\,x - x^2} \qquad (14a)$$

Die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens deutet an, dass die Ordinaten positiv und negativ, d. h. zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegen können. Da der Wurzelausdruck rechts allein steht, so sind die beiden aus dem Ausdrucke rechts sich ergebenden Werthe für y ihrem absoluten Werthe nach gleich, nur dem Vorzeichen nach verschieden, womit angedeutet ist, dass zu einer Abscisse zwei gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten gehören.

Da es ganz gleichgültig ist, welche der beiden Axen man als Xaxe und welche man als Yaxe ansehen will, so kann man die letztere Gleichung auch schreiben:

$$x = \sqrt{2\,r\,y - y^2}. \qquad (14b)$$

§ 12.

Die Ellipse.

Die Ellipse ist eine Kurve, in welcher die Summe der Abstände jedes beliebigen Kurvenpunktes von zwei festen Punkten F und F′ (Brennpunkten), constant ist, also z. B. in Fig. 8 $N\,F' + N\,F = P\,F' + P\,F$.

$P\,F'$ und $P\,F$ heissen radii vectores, $M\,M'$, der Lage nach bestimmt durch die Brennpunkte F und F′, heisst die grosse Axe, ihr Halbirungspunkt A der Mittelpunkt, die in A errichtete Senkrechte $N\,N'$ die kleine Axe der Ellipse. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte heisst die Excentricität. Die doppelte