Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 12. Die Ellipse

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

$y_1 = y_2 = y$, $x_1 = x_2 = x$, so erhalten wir die Coordinaten für den Schnittpunkt beider Linien aus den zwei Gleichungen:

$$y = a_1 x + b_1$$
$$y = a_2 x + b_2$$

welche nach x und y aufzulösen sind.

§ 10.

Umformung der Coordinaten.

Gegeben seien die Coordinaten eines Punktes P, Fig. 6, bezogen auf das Coordinatensystem 0′Y′, 0′X′, gesucht die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das System 0 Y, 0 X. Die Neigung der Abscissenaxen beider Systeme zu einander sei α, die Coordinaten des Punktes 0′, bezogen auf das System 0 Y, 0 x seien a, (Abscisse), und b, (Ordinate), so ist:

$$x = 0S - QS = a + 0'R - Q'T$$

und analog
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

§ 11.

Gleichung des Kreises.

Ist der Kreismittelpunkt Nullpunkt des Coordinatensystems, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises ohne Weiteres: — vergl. Fig. 7a:

$$y^2 = r^2 - x^2 \qquad (14)$$

(Mittelpunktsgleichung.) Liegt dagegen der Nullpunkt in einem Endpunkte des Durchmessers, und betrachtet man diesen als Abscissenaxe, die Tangente im Nullpunkte als Coordinatenaxe, Fig. 7b, so ergiebt sich die **Scheitelgleichung:**

$$y^2 = r^2 - (r - x)^2$$
$$= 2rx - x^2$$
$$y = \sqrt{2rx - x^2} \qquad (14a)$$

Die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens deutet an, dass die Ordinaten positiv und negativ, d. h. zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegen können. Da der Wurzelausdruck rechts allein steht, so sind die beiden aus dem Ausdrucke rechts sich ergebenden Werthe für y ihrem absoluten Werthe nach gleich, nur dem Vorzeichen nach verschieden, womit angedeutet ist, dass zu einer Abscisse zwei gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten gehören.

Da es ganz gleichgültig ist, welche der beiden Axen man als Xaxe und welche man als Yaxe ansehen will, so kann man die letztere Gleichung auch schreiben:

$$x = \sqrt{2ry - y^2}. \qquad (14b)$$

§ 12.

Die Ellipse.

Die Ellipse ist eine Kurve, in welcher die Summe der Abstände jedes beliebigen Kurvenpunktes von zwei festen Punkten F und F′ (Brennpunkten), constant ist, also z. B. in Fig. 8 $NF' + NF = PF' + PF$.

PF′ und PF heissen radii vectores, MM′, der Lage nach bestimmt durch die Brennpunkte F und F′, heisst die grosse Axe, ihr Halbirungspunkt A der Mittelpunkt, die in A errichtete Senkrechte NN′ die kleine Axe der Ellipse. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte heisst die Excentricität. Die doppelte

Ordinate in einem der Brennpunkte, bezogen auf die grosse Axe als Abscissenaxe, der Parameter der Ellipse.

Bezeichnen a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe, e die Excentricität, z und z' die Radien vectoren, so folgt aus der Grundeigenschaft der Ellipse ohne Weiteres:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ z + z' = 2a. \\ 2)\ e = \sqrt{a^2 - b^2},\ (\text{da } FN = a). \end{array}\right\} \qquad (15)$$

§ 13.

Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Es ist (Fig. 8):

$$z = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$

$$z' = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

also $z + z'$, d. i. nach (15) $2a = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} + \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$.

$$2a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

oder wenn wir quadriren:

$$4a^2 + y^2 + e^2 + x^2 - 2ex - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 + 2ex.$$

oder: $a^2 - ex = a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$.

und wenn wir nochmals quadriren:

$$a^4 - e^2x^2 - 2a^2ex = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 - 2a^2ex$$

oder $a^2(a^2 - e^2) = a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2$

oder, da $a^2 - e^2 = b^2$, nach (15):

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (16)$$

§ 14.

Scheitelgleichung der Ellipse.

Verlegt man den Coordinatennullpunkt an einen Endpunkt der grossen Axe, so ändern sich nur die Abscissen um die grosse Halbaxe, während die Ordinaten unverändert bleiben. Die Mittelpunktsgleichung geht daher, indem man statt x den Werth $(x - a)$ setzt, über in:

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2). \qquad (16a)$$

Das doppelte Vorzeichen, welches sich aus dieser quadratischen Gleichung für y ergiebt, deutet an, dass für jede Abscisse zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten existiren. Die Kurve liegt also zu beiden Seiten der Abscissenaxe.

Zusatz. Für $b = a$ gehen die Gleichungen der Ellipse in die des Kreises über. Dieser ist also eine Ellipse, deren Excentricität $= 0$. (Vergl. 14a.)

§. 15.

Parabel. Gleichung derselben.

Mit dem Namen Parabel bezeichnet man eine Kurve, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte (Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (Leitlinie, Direktrix) gleiche Abstände hat. (Fig. 9.) $BP = PF$.

Liegt der Coordinatennullpunkt im Scheitel A, so ist für den Punkt P $AQ = x$, $PQ = y$.

Nach der charakteristischen Eigenschaft der Parabel ist, wenn p den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix bezeichnet: