Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 14. Scheitelgleichung der Ellipse

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Ordinate in einem der Brennpunkte, bezogen auf die grosse Axe als Abscissenaxe, der Parameter der Ellipse.

Bezeichnen a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe, e die Excentricität, z und z′ die Radien vectoren, so folgt aus der Grundeigenschaft der Ellipse ohne Weiteres:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ z + z' = 2a. \\ 2)\ e = \sqrt{a^2 - b^2},\ (\text{da } FN = a). \end{array}\right\} \qquad (15)$$

§ 13.

Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Es ist (Fig. 8):

$$z = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$

$$z' = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

also $z + z'$, d. i. nach (15) $2a = \sqrt{y^2 + (e-x)^2} + \sqrt{y^2 + (e+x)^2}$.

$$2a - \sqrt{y^2 + (e-x)^2} = \sqrt{y^2 + (e+x)^2}$$

oder wenn wir quadriren:

$$4a^2 + y^2 + e^2 + x^2 - 2ex - 4a\sqrt{y^2 + (e-x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 + 2ex.$$

oder: $a^2 - ex = a\sqrt{y^2 + (e-x)^2}$.

und wenn wir nochmals quadriren:

$$a^4 - e^2x^2 - 2a^2ex = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 - 2a^2ex$$

oder $a^2(a^2 - e^2) = a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2$

oder, da $a^2 - e^2 = b^2$, nach (15):

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (16)$$

§ 14.

Scheitelgleichung der Ellipse.

Verlegt man den Coordinatennullpunkt an einen Endpunkt der grossen Axe, so ändern sich nur die Abscissen um die grosse Halbaxe, während die Ordinaten unverändert bleiben. Die Mittelpunktsgleichung geht daher, indem man statt x den Werth $(x - a)$ setzt, über in:

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2). \qquad (16a)$$

Das doppelte Vorzeichen, welches sich aus dieser quadratischen Gleichung für y ergiebt, deutet an, dass für jede Abscisse zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten existiren. Die Kurve liegt also zu beiden Seiten der Abscissenaxe.

Zusatz. Für $b = a$ gehen die Gleichungen der Ellipse in die des Kreises über. Dieser ist also eine Ellipse, deren Excentricität $= 0$. (Vergl. 14a.)

§. 15.

Parabel. Gleichung derselben.

Mit dem Namen Parabel bezeichnet man eine Kurve, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte (Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (Leitlinie, Direktrix) gleiche Abstände hat. (Fig. 9.) $BP = PF$.

Liegt der Coordinatennullpunkt im Scheitel A, so ist für den Punkt P $AQ = x$, $PQ = y$.

Nach der charakteristischen Eigenschaft der Parabel ist, wenn p den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix bezeichnet: