



Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 17. Erläuterungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-79893)

$$\begin{aligned}
 & 1) AF = \frac{1}{2}p. \\
 & 2) PF = BP = FQ + p. \\
 \text{ferner} \quad & y^2 = PF^2 - FQ^2 \\
 & = (FQ + p)^2 - FQ^2 = p^2 + 2FQ \cdot p. \\
 & = p^2 + 2(x - \frac{1}{2}p)p \\
 \text{oder:} \quad & y^2 = 2px. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Parameter: Die Abscisse des Brennpunktes ist $= \frac{1}{2}p$, daher die zugehörige Ordinate, d. h. der halbe Parameter der Parabel nach (17): $y^2 = p^2$, also $y = p$, also der Parameter, (d. i. $2y$) $= 2p$.

§ 16.

Hyperbel. Gleichung derselben.

Die Hyperbel ist eine Kurve von der Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände (radii vectores) jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten, (Brennpunkten), constant ist.

In Fig. 10 ist also für jeden beliebigen Punkt P der Kurve $F'P - FP$ constant. Wir setzen dieselbe $= 2a$.

Nehmen wir FF' als Abscissenaxe, die in ihrem Halbirungspunkt A errichtete Senkrechte als Ordinatenaxe, dann ist, wenn $FF' = e$ gesetzt wird, analog § 13:

$$\begin{aligned}
 PF' - PF &= 2a = \sqrt{y^2 + (x + e)^2} - \sqrt{y^2 + (x - e)^2} \\
 2a + \sqrt{y^2 + (x - e)^2} &= \sqrt{y^2 + (x + e)^2}.
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt: (analog § 13)

$$a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 = -a^2 (e^2 - a^2)$$

und wenn man $e^2 - a^2 = b^2$ setzt:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

$$\text{oder} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{18}$$

Für $x = a$ wird $y = 0$, der Punkt P liegt also für $x = a$ in der Abscissenaxe, die Kurve schneidet also die Abscissenaxe in der Entfernung a vom Coordinatennullpunkte. Dieser Durchschnittspunkt ist der der Coordinatenaxe nächste Punkt der Kurve, denn für $x < a$ wird die Wurzel imaginär. Für $x = -a$ wird y ebenfalls $= 0$, mithin wird die Abscissenaxe in ihrem negativen Theile ebenfalls von der Kurve geschnitten, diese besteht also aus zwei getrennten Theilen. Die Entfernung der beiden Punkte M und M' ist $= 2a$.

Wir werden dieses Capitel im Abschnitt IV mit Anwendung der im nächsten Abschnitt III zu behandelnden Differentialrechnung fortsetzen.

III. Differentialrechnung.

§ 17.

Erläuterungen.

Bedeutet $y = f(x)$ dass y eine Funktion von x sei, wobei wir uns also unter $f(x)$ irgend einen Ausdruck, in welchem x in irgend einer Verbindung vorkommt, zu denken haben, (vergl. Abschn. II § 7), so wird, sobald man x um eine gewisse

Grösse ändert, auch y eine Aenderung erleiden. Bezeichnen wir die Grössen, um welche x und y sich ändern, mit Δx und Δy , so ist:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - y \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \end{aligned}$$

und das Verhältniss der Aenderungen (Differenzen genannt)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (19)$$

Das Verhältniss $\Delta y : \Delta x$ heisst Differenzenquotient. Je mehr sich die Differenzen Δy und Δx der Null nähern, um so mehr nähert sich der Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einem ganz bestimmten Werthe, und geht in diesen über, sobald Δy und Δx der Null gleich werden.

Hat man z. B. die Funktion:

$$y = ax^2$$

so ist

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a(x + \Delta x)^2 \\ &= ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 \\ \Delta y &= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Je mehr nun Δx sich der Null nähert, um so mehr nähert sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Grenze $2ax$, und geht in diese über, sobald Δx in Null übergeht.

Sind die Differenzen Δx und Δy unendlich klein, so nennt man sie Differentiale und bezeichnet sie mit dx und dy . Das Symbol $\frac{dy}{dx}$ liest man „Differentialquotient“ von y nach x . Die Grösse x heisst die „Veränderliche“ der Funktion $f(x)$.

Unter dem Differentialquotienten einer Funktion nach ihrer Veränderlichen versteht man also nach Obigen die Grenze, welcher der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich ohne Ende nähert, wenn man die Aenderung Δx sich der Null nähern lässt. Der Differentialquotient nimmt zwar die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, hat aber, wie obiges Beispiel zeigt, doch einen ganz bestimmten Werth.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ist } y &= ax + b, \text{ so ist } y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b \\ &= ax + a\Delta x + b, \text{ folglich } \Delta y = a\Delta x, \text{ also } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ für jeden beliebigen} \end{aligned}$$

$$\text{Werth der Aenderung } \Delta x, \text{ mithin auch } \frac{dy}{dx} = a, \text{ d. i. } \frac{d(ax + b)}{dx} = a.$$

$$2) \text{ Für } y = a + x \text{ findet man auf demselben Wege } \frac{dy}{dx}, \text{ d. i. } \frac{d(a + x)}{dx} = 1.$$

$$3) \text{ Ist } y = a - x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = -1.$$

$$4) \text{ „ } y = \pm x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

5) Ist $y = ax$, so ist $\frac{dy}{dx} = a$.

6) Für $y = \frac{a}{x}$ ist $\frac{dy}{dx}$, d. i. $\frac{d}{dx} \frac{a}{x} = -\frac{a}{x^2}$.

7) „ $y = \frac{x}{a}$ „ $\frac{dy}{dx}$, d. i. $\frac{d}{dx} \frac{x}{a} = \frac{1}{a}$.

Wir fügen hierzu unser obiges Beispiel:

8) Für $y = ax^2$ ist $\frac{dy}{dx}$, d. i. $\frac{d}{dx} ax^2 = 2ax$.

§ 18.

Differentiation der Summe zweier Funktionen.

Hat man $y = f(x) + \varphi(x)$
so ist $y + \Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x)$
 $\Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x) - [f(x) + \varphi(x)]$
 $= f(x + \Delta x) - f(x) + [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)]$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$

oder nach (19) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$

oder wenn man zur Grenze übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (20)$$

D. h. der Differentialquotient der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Beispiel: Ist $y = ax^2 + bx$, so ist nach diesem Satze $\frac{dy}{dx} = \frac{dax^2}{dx} + \frac{dbx}{dx}$. Nach § 17, Beispiel 8, ist $\frac{dax^2}{dx} = 2ax$, und nach Beispiel 5: $\frac{dbx}{dx} = b$, folglich $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, d. i. $\frac{d(ax^2 + bx)}{dx} = 2ax + b$.

Aufgabe: Um wieviel ändert sich die Funktion $y = ax^2 + bx$, wenn x um den kleinen Betrag dx geändert wird?

Nach obigem Beispiel ist: $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, also $dy = (2ax + b)dx$.

Man findet also die Aenderung der Funktion, indem man die Aenderung der Variablen mit dem Differentialquotienten der Funktion multipliziert.

Zusatz: Für $y = a + x$ ist nach obigem Satze:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} + \frac{dx}{dx}$$

Nach § 17, Beispiel 2, ist

$$\frac{d(a+x)}{dx} = 1$$

folglich $\frac{da}{dx} + \frac{dx}{dx} = 1$

$$\frac{da}{dx} + 1 = 1$$

folglich $\frac{da}{dx} = 0$.