



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 21. Differentiation des Quotienten zweier Funktionen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-79893)

D. h. der Differentialquotient einer Constanten ist $= 0$. Dies folgt auch schon daraus, dass bei einer Constanten von einer Aenderung keine Rede sein kann, mithin $da = 0$ sein muss.

§ 19.

Differentiation der Differenz zweier Funktionen.

Man erhält ganz analog § 18 den Satz:

Der Differentialquotient der Differenz zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen, also

$$\frac{d[f(x) - q(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dq(x)}{dx}. \quad (21)$$

§ 20.

Differentiation des Produkts zweier Funktionen.

1) Ist $y = f(x) \cdot q(x)$

so ist $\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot q(x + \Delta x) - f(x) \cdot q(x)$

oder wenn man rechts $f(x + \Delta x) q(x)$ erst addirt und wieder subtrahirt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) q(x) - f(x) q(x) + f(x + \Delta x) q(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) q(x) \\ &= q(x) [f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x + \Delta x) [q(x + \Delta x) - q(x)] \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = q(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x + \Delta x) \frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x}$$

oder wenn wir zur Grenze übergehen:

$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{df(x) q(x)}{dx} = q(x) \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{dq(x)}{dx} \quad (22)$$

D. h. Der Differentialquotient des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte aus jeder Funktion in den Differentialquotienten der anderen.

In anderer Schreibweise lautet die Gleichung:

$$d(f(x) q(x)) = q(x) df(x) + f(x) dq(x). \quad (22a)$$

Folgerung: $d(af(x)) = a df(x) + f(x) da$, oder, da $da = 0$ (§ 18 Zusatz): $d(af(x)) = a df(x)$.

2) Ist ein Produkt von mehreren Faktoren zu differentüiren, z. B. $y = u \cdot v \cdot w$, worin u, v, w Funktionen von x bezeichnen sollen, so ist nach 1)

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot w \frac{du}{dx} + u \frac{d(v \cdot w)}{dx}$$

$$\text{oder da } \frac{d(v \cdot w)}{dx} = v \frac{dw}{dx} + w \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d(uvw)}{dx} = vw \frac{du}{dx} + uv \frac{dv}{dx} + u v \frac{dw}{dx} \quad (22b)$$

$$\text{oder auch } \frac{d(uvw)}{dx} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}. \quad (22c)$$

§ 21.

Differentiation des Quotienten zweier Funktionen.

Sei

$$y = \frac{f(x)}{q(x)}$$

so ist

$$y q(x) = f(x)$$

folglich
$$\frac{d f(x)}{d x} = y \frac{d \varphi(x)}{d x} + \varphi(x) \frac{d y}{d x} \quad (\text{nach § 20})$$

$$= \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{d \varphi(x)}{d x} + \varphi(x) \frac{d y}{d x}$$

also
$$\varphi(x) \frac{d f(x)}{d x} = f(x) \frac{d \varphi(x)}{d x} + [\varphi(x)]^2 \frac{d y}{d x}$$

woraus folgt:

$$\frac{d y}{d x} \text{ d. i. } \frac{d f(x)}{d x} = \frac{\varphi(x) \frac{d f(x)}{d x} - f(x) \frac{d \varphi(x)}{d x}}{[\varphi(x)]^2} \quad (23)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{d f(x)}{d \varphi(x)} = \frac{\varphi(x) \frac{d f(x)}{d x} - f(x) \frac{d \varphi(x)}{d x}}{[\varphi(x)]^2} \quad (33a)$$

D. h. das Differential eines Quotienten ist gleich dem Produkt aus dem Differential des Zählers in den Nenner, vermindert um das Produkt aus dem Differential des Nenners in den Zähler und dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Ist der Zähler constant, so hat man:

$$\frac{d \frac{a}{f(x)}}{d x} = - \frac{a \frac{d f(x)}{d x}}{[f(x)]^2}$$

Ist $f(x)$ gleich x , so hat man also:

$$\frac{d \frac{a}{x}}{d x} = - \frac{a}{x^2} \quad (\text{vergl. § 17, Beispiel 6}). \quad (24)$$

Ist der Nenner constant, so erhält man für $f(x) = x$:

$$\frac{d \frac{x}{a}}{d x} = \frac{1}{a}, \quad (\text{vergl. § 17, Beispiel 7}). \quad (25)$$

§ 22.

Differentiation der Potenz zweier Funktionen.

1) Sei $y = [f(x)]^n = f(x) f(x) f(x) \dots n \text{ mal.}$, so ist nach 22c

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= \frac{d [f(x)]^n}{d x} = \frac{d f(x)}{d x} \frac{d [f(x)]^{n-1}}{d x} + \frac{d f(x)}{d x} + \dots \\ &= n \frac{d f(x)}{d x} \end{aligned}$$

folglich
$$\frac{d [f(x)]^n}{d x} = n [f(x)]^{n-1} \frac{d f(x)}{d x} \quad (26)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$d [f(x)]^n = n [f(x)]^{n-1} d f(x) \quad (26a)$$

Beispiel: Nach (22) ist $\frac{d (a x)^2}{d x} = 2 a x \cdot a = 2 a^2 x$.

*) Bei der Ableitung dieser Formel ist ein positives ganzes n vorausgesetzt. Dass die Formel auch für ein negatives und gebrochenes n gilt, lässt sich zeigen, indem man $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$ setzt, bzw. wenn

man statt $y = [f(x)]^q$ schreibt $y^q = [f(x)]^p$ und hierauf Formel (26) anwendet, mit welcher Andeutung wir uns hier begnügen wollen.