Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 19. Differentation der Differenz zweier Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

D. h. der Differentialquotient einer Constanten ist $= 0$. Dies folgt auch schon daraus, dass bei einer Constanten von einer Aenderung keine Rede sein kann, mithin $d\,a = 0$ sein muss.

§ 19.

Differentiation der Differenz zweier Funktionen.

Man erhält ganz analog § 18 den Satz:

Der Differentialquotient der Differenz zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen, also

$$\frac{d\,[f(x) - \varphi(x)]}{d\,x} = \frac{d\,f(x)}{d\,x} - \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}. \tag{21}$$

§ 20.

Differentiation des Produkts zweier Funktionen.

1) Ist $\quad y = f(x) \cdot \varphi(x)$

so ist $\quad \triangle y = f(x + \triangle x) \cdot \varphi(x + \triangle x) - f(x) \cdot \varphi(x)$

oder wenn man rechts $f(x + \triangle x)\,\varphi(x)$ erst addirt und wieder subtrahirt:

$$\begin{aligned}\triangle y &= f(x + \triangle x)\,\varphi(x) - f(x)\,\varphi(x) + f(x + \triangle x)\,\varphi(x + \triangle x) - f(x + \triangle x)\,\varphi\,x \\ &= \varphi(x)\,[f(x + \triangle x) - f(x)] + f(x + \triangle x)\,[\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)]\end{aligned}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \varphi(x)\,\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} + f(x + \triangle x)\,\frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x}$$

oder wenn wir zur Grenze übergehen:

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d\,f(x)\,\varphi(x)}{d\,x} = \varphi(x)\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + f(x)\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} \tag{22}$$

D. h. Der Differentialquotient des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte aus jeder Funktion in den Differentialquotienten der anderen.

In anderer Schreibweise lautet die Gleichung:

$$d\,(f(x)\,\varphi(x)) = \varphi(x)\,d\,f(x) + f(x) \cdot d\,\varphi(x). \tag{22a}$$

Folgerung: $d\,(a\,f(x)) = a\,d\,f(x) + f(x)\,d\,a$, oder, da $d\,a = 0$ (§ 18 Zusatz): $d\,(a\,f(x)) = a\,d\,f(x)$.

2) Ist ein Produkt von mehreren Faktoren zu differentiiren, z. B. $y = u \cdot v \cdot w$, worin u, v, w Funktionen von x bezeichnen sollen, so ist nach 1)

$$\frac{d\,y}{d\,x} = v \cdot w\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,\frac{d\,(v \cdot w)}{d\,x}$$

oder da $\displaystyle \frac{d\,(v \cdot w)}{d\,x} = v\,\frac{d\,w}{d\,x} + w\,\frac{d\,v}{d\,x}$

$$\frac{d\,y}{d\,x}, \text{ d. i. } \frac{d\,(u\,v\,w)}{d\,x} = v\,w\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,w\,\frac{d\,v}{d\,x} + u\,v\,\frac{d\,w}{d\,x} \tag{22b}$$

oder auch

$$\frac{\frac{d\,u\,v\,w}{d\,x}}{u\,v\,w} = \frac{\frac{d\,u}{d\,x}}{u} + \frac{\frac{d\,v}{d\,x}}{v} + \frac{\frac{d\,w}{d\,x}}{w}. \tag{22c}$$

§ 21.

Differentiation des Quotienten zweier Funktionen.

Sei $\quad y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

so ist $\quad y\,\varphi(x) = f(x)$