Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 25. Unentwickelte Funktionen

§ 24.

Funktionen zwischen zwei Veränderlichen.

Hat man eine von zwei Veränderlichen abhängige Funktion

$$z = f(x, y)$$

so ist: $\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y)$

oder für $x + \triangle x = x_1$, $y + \triangle y = y_1$:

$$\triangle z = f(x_1, y_1) - f(x, y)$$

oder wenn man rechts $f(x, y_1)$ erst subtrahirt und dann addirt:

$$\triangle z = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\triangle x} \cdot \triangle x + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y.$$

Je mehr sich nun $\triangle y$ der Null nähert, um so mehr nähert sich y_1 der Grenze y. Beim Uebergange zur Grenze wird also y_1 in y übergehen. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man schon vor dem Uebergange zur Grenze y für y_1 setzt, dann aber beim Uebergange y als Constante betrachtet, so dass es als solche beim Uebergange unverändert bleibt. Wir werden daher statt des Ausdrucks $\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\triangle x}$ den Differenzenquotienten $\frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{\triangle x}$ zur Grenze überführen und dabei y als Constante betrachten. Ebenso können wir im zweiten Gliede rechts x als Constante betrachten, und erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy. \tag{29}$$

D. h. um das Differential dz der Funktion zu erhalten, differentiirt man dieselbe erst nach x, indem man y als Constante betrachtet, sodann nach y, indem man x als Constante betrachtet. Mit den so erhaltenen Differentialquotienten multiplicirt man die Differentiale der Veränderlichen und addirt die Produkte. Die so gebildeten Differentialquotienten heissen **partielle** Differentialquotienten und werden als solche symbolisch durch ein rundes ∂ bezeichnet. Die Ausdrücke $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$ und $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ heissen **partielle** Differentiale von z nach x und y. Das vollständige Differential dz ist also gleich der Summe der partiellen Differentiale nach den einzelnen Veränderlichen.

§ 25.

Unentwickelte Funktionen.

Ist eine Funktion noch unentwickelt, ist z. B. y nicht in der Form $y = f(x)$, sondern in der noch unentwickelten Form $f(x, y) = 0$ gegeben, in welcher uns also der Werth von y noch unbekannt ist, so ist zwar y gleichwohl eine Funktion von x, doch gestaltet sich die Operation des Differentiirens in diesem Falle etwas anders. Ist $0 = f(x, y)$, so ist nach (29)

$$d\,0,\ \text{d. i. } 0 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \tag{30}$$

D. h. man differentiirt unentwickelte Funktionen, indem man dieselben partiell erst nach x und dann nach y differentiirt und die partiellen Differentialquotienten nach obiger Formel zusammensetzt.

Beispiel: $f(x, y) = ax^2 + by + c = 0$. 1) $\frac{\partial f(x, y)}{dx} = 2ax$. 2) $\frac{\partial f(x, y)}{dy} = b$,

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = -\frac{2ax}{b}.$$

Von obiger Formel (30) macht man häufig Gebrauch, um in der entwickelten Form vorkommende Wurzeln etc. zu vermeiden.

Beispiel: $y = x\sqrt{x}$, also $y^2 - x^3 = 0$.

$$1)\ \frac{d f(x, y)}{dx} = -3x^2 \quad 2)\ \frac{d f(x, y)}{dy} = 2y, \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}.$$

Beispiele zur Uebung in der Anwendung der bisherigen Paragraphen.

1) $y = x\sqrt{1+x}$.

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d\sqrt{1+x}}{dx} + \sqrt{1+x} \cdot \frac{dx}{dx} = x \times \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(1+x)}{dx} + \sqrt{1+x} \times 1$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \times 1 + \sqrt{1+x} = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}, \text{ oder einfacher nach § 25:}$$

2) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2}$ | $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^3}{x^2+\sqrt{a^2+x^2}}$

3) $y = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$ | $\frac{dy}{dx} = -4x^3$

4) $y = \frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

5) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

6) $y^2 = ax - x^2$. Setzt man a) $y^2 = z$, so ist b) $z = ax - x^2$, also $\frac{dz}{dx} = a - 2x$, oder da nach

$$\text{a) } dz = 2y\,dy, \text{ so ist: } 2y\frac{dy}{dx} = a - 2x, \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{a-2x}{2y} = \frac{a-2x}{2(ax-x^2)}$$

7) $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$. Es ist: $a^2 2y\,dy = -b^2 2x\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

8) $z^2 = x^2 + y^2$. Hier kommt § 24 in Betracht. Es ist $2z\,dz = 2x\,dx + 2y\,dy$

$$\text{also } dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}.$$

§ 26.

Wiederholte Differentiation.

Enthält der Differentialquotient einer Funktion von x ausser Constanten auch noch die Variable x, so ist derselbe wiederum eine Funktion von x, und man kann mit ihm die Operation des Differentiirens wiederholen. Den so erhaltenen Differentialquotienten nennen wir den 2. Differentialquotienten, (die 2. Abgeleitete). Entsprechend kann man den 3., 4. etc. Differentialquotienten bilden. Ist $y = f(x)$, so bezeichnet man den ersten, 2., 3. .. Differentialquotienten dieser Funktion mit $f'(x)$. $f''(x)$, $f'''(x)$, oder man braucht das Symbol $\frac{dy}{dy}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ - - - . Zu dieser Bezeichnung ist man auf folgende Weise gekommen:

Ist $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, so erhält man durch Differentiation, indem man dx als Constante ansieht; (§ 21):

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{d(dy)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$