Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 27. Mac Laurins Theorem

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

und indem man $\frac{d\,y}{d\,x^2}$ nochmals differentiirt, analog:

$$\frac{d\frac{d^2 y}{d x^2}}{d x} = \frac{d^3 y}{d x^3} = f'''(x).$$

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass die Exponenten von d, d^2, d^3 - - - nur das 1., 2., 3. etc. Differential andeuten, nicht etwa Potenzen von d bezeichnen können.

Beispiel: $y = x^n$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f'(x) = n\,x^{n-1} \quad \text{(vergl. § 22)}$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = f^n(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;3\,.\,2\,.\,1.$$

Alle noch höheren Differentialquotienten sind hier $= 0$.

§ 27.
Mac Laurins Theorem.

Wir denken uns f(x) in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, nämlich

$$1)\; f(x) = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + \ldots$$

worin A, B, C noch näher zu bestimmende Constanten bezeichnen. Verstehen wir unter f(0) denjenigen Werth von f(x), welchen diese Funktion annimmt, wenn in derselben $x = 0$ gesetzt wird, so ist

$$f(0) = A.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) erhalten wir (§ 18 u. 22):

$$2)\; \frac{d\,f(x)}{d\,x} = f'(x) = B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + \ldots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f'(0) = B.$$

Durch Differentiation von 2) wird erhalten

$$3)\; \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2} = f''(x) = 2\,C + 2\,.\,3\,D\,x + 3\,.\,4\,E\,x^2 + \ldots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f''(0) = 2\,C$$

und analog $\qquad f'''(0) = 2\,.\,3\,D$

etc.

Mithin bestimmen sich die Coefficienten A, B, C . . . wie folgt:

$$A = f(0)$$
$$B = f'(0)$$
$$C = f''(0)\,.\,\frac{1}{1\,.\,2}$$
$$D = f'''(0)\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}$$

wodurch aus Gl. 1) erhalten wird:

$$\mathbf{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)\,x}{1} + \frac{f''(0)\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{f'''(0)\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots} \qquad (31)$$

In Worten: Lässt sich eine Funktion von x nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln, so ist deren constantes Glied gleich demjenigen Werthe der Funktion, den dieselbe für $x = 0$ annimmt, ihre Coofficienten aber gleich denjenigen Werthen des 1., 2., 3. . . . Differentialquotienten, welche diese für $x = 0$ annehmen, dividirt durch die Facultäten der aufsteigenden Zahlen von 1 ab.

Beispiel im folgenden §.

§ 28.

Binomialreihe.

Hat man $f(x) = (a + x)^n$

so ist $f'(x) = n(a + x)^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(a + x)^{n-2}$

$$\begin{array}{ccc} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array}$$

$f^k(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k_{+1})(a+x)^{n-k}$

also: $f(0) = a^n$

$f'(0) = n\,a^{n-1}$

$f''(0) = n(n-1)\,a^{n-2}$

$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \end{array}$$

$f^k(0) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k_{+1}))\,a^{n-k}$

also nach (31)

$$(a + x)^n = a^n + n\,a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}x\,\frac{n(n-1)\ldots(n-(k_{+1}))}{1\,.\,2\ldots(k_{-1})\,k}\,.\,a^{n-k}x^k \quad (32)$$

die bekannte Binomialreihe.

§ 29.

Differentiation von Exponentialgrössen.

Wir lassen in der Funktion

$$y = a^x$$

den Exponenten x um die Grösse k wachsen und setzen

$$y_1 = a^{x+k}.$$

oder 1) $y_1 = a^x[1 + (a-1)]^k$

oder nach (32)

$$y_1 = a^x\left\{1 + k(a-1) + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}(a-1)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

$$= a^x\left\{1 + k(a-1) + \frac{k^2-k}{1\,.\,2}(a-1)^2 + \frac{k^3-k^2+2k}{1\,.\,2\,.\,3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

$$= a^x\left\{1 + k(a-1) + \frac{k^2(a-1)^2}{1\,.\,2} - \frac{k(a-1)^2}{2} + \frac{(k^3-k^2)(a-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k}{3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

Bezeichnen wir hierin die Coofficienten aller derjenigen Glieder, welche k in höherer als in der 1. Potenz enthalten, mit p, q, r etc., so lautet die Gleichung:

$$y_1 = a^x\left\{1 + k(a-1) - \frac{k}{2}(a-1)^2 + \frac{k}{3}(a-1)^3 - \ldots + p\,k^2 + q\,k^3 + r\,k^4 + \ldots\right\}$$