Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 29. Differentation von Exponentialgrössen

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

In Worten: Lässt sich eine Funktion von x nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln, so ist deren constantes Glied gleich demjenigen Werthe der Funktion, den dieselbe für $x = 0$ annimmt, ihre Coofficienten aber gleich denjenigen Werthen des 1., 2., 3. . . . Differentialquotienten, welche diese für $x = 0$ annehmen, dividirt durch die Facultäten der aufsteigenden Zahlen von 1 ab.

Beispiel im folgenden §.

§ 28.

Binomialreihe.

Hat man $f(x) = (a + x)^n$

so ist $f'(x) = n\,(a + x)^{n-1}$

$$f''(x) = n\,(n-1)\,(a + x)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^k(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n - k_{+1})\,(a + x)^{n-k}$$

also: $f(0) = a^n$

$$f'(0) = n\,a^{n-1}$$

$$f''(0) = n\,(n-1)\,a^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^k(0) = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n - (k_{+1}))\,a^{n-k}$$

also nach (31)

$$(a + x)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,x\,\frac{n\,(n-1)\ldots(n-(k_{+1}))}{1\,.\,2\ldots(k_{-1})\,k}\,.\,a^{n-k}\,x^k \quad (32)$$

die bekannte Binomialreihe.

§ 29.

Differentiation von Exponentialgrössen.

Wir lassen in der Funktion

$$y = a^x$$

den Exponenten x um die Grösse k wachsen und setzen

$$y_1 = a^{x+k}.$$

oder $\quad 1)\; y_1 = a^x\,[1 + (a - 1)]^k$

oder nach (32)

$$y_1 = a^x \left\{1 + k\,(a-1) + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}(a-1)^2 + \frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

$$= a^x \left\{1 + k\,(a-1) + \frac{k^2 - k}{1\,.\,2}(a-1)^2 + \frac{k^3 - k^2 + 2\,k}{1\,.\,2\,.\,3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

$$= a^x \left\{1 + k\,(a-1) + \frac{k^2(a-1)^2}{1\,.\,2} - \frac{k\,(a-1)^2}{2} + \frac{(k^3 - k^2)(a-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k}{3}(a-1)^3 + \ldots\right\}$$

Bezeichnen wir hierin die Coofficienten aller derjenigen Glieder, welche k in höherer als in der 1. Potenz enthalten, mit p, q, r etc., so lautet die Gleichung:

$$y_1 = a^x \left\{1 + k\,(a-1) - \frac{k}{2}(a-1)^2 + \frac{k}{3}(a-1)^3 - \ldots + p\,k^2 + q\,k^3 + r\,k^4 + \ldots\right\}$$

$$= a^x \left\{1 + \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \ldots\right\}$$

$$= a^x + a^x \left\{\left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \ldots\right\}$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung $y = a^x$ und dividirt gleichzeitig durch k, so entsteht:

$$\frac{y_1 - y}{k} = a^x \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right] + p k + q k^2 + r k^3 + \ldots$$

und wenn man zur Grenze übergeht, indem man $k = dx = 0$ setzt:

$$2)\ \frac{dy}{dx} = a^x \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\right]$$

oder wenn man die Klammergrösse = A setzt:

$$3)\ \frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d a^x}{dx} = a^x A.$$

Da A eine Constante, so folgt hieraus ohne Weiteres:

$$3a) \begin{cases} \dfrac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x A^2 = f''(x) \\ \dfrac{d^3 a^x}{dx^3} = a^x A^3 = f'''(x) \end{cases}$$

etc.

Um die Constante A zu bestimmen, entwickeln wir a^x nach der Mac Laurinschen Reihe und erhalten:

$$\begin{array}{lll} & f(x) = a^x & \text{also } f(0) = 1 \\ \text{und nach 3)} & f'(x) = a^x A & \text{also } f'(0) = A \\ & f''(x) = a^x A^2 & \text{also } f''(0) = A^2 \\ & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

also $$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3} + \ldots$$

und wenn man hierin $x = \frac{1}{A}$ setzt:

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

oder 4) $a^{\frac{1}{A}} = 2{,}71828.$

Diese Zahl wird allgemein mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Nach 4) ist $\sqrt[A]{a} = e$, also $a = e^A$, folglich

$$5)\ A = \frac{\log a}{\log e}$$

für jede beliebige Logarithmenbasis. Nimmt man diese = e, — (natürliches Logarithmensystem), — so ist

$$A = \frac{\overset{e}{\log}\, a}{\overset{e}{\log}\, e} = \overset{e}{\log}\, a = \log \operatorname{nat} a \text{ (logarithmus naturalis a)}$$

also nach 3) $$\frac{d a^x}{dx} = a^x \log \operatorname{nat} a. \qquad (33)$$

Folgerung: $\frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x$.

Um vom natürlichen Logarithmus auf den Logarithmus eines anderen Systems überzugehen, hat man nach 5)

$$\log \text{nat}\, a = \frac{\log a}{\log e}$$

also $\quad \log a = \log \text{nat}\, a \log e$.

oder für $\log e = M$

$$\log a = \log \text{nat}\, a \,.\, M. \tag{34}$$

Für das Briggische System ist $\overset{10}{\log}\, e = M = 0{,}4342945$. Diese Zahl heisst der Modulus des briggischen Logarithmensystems.

§ 30.
Differentiation logarithmischer Grössen.

Ist $\quad y = \overset{b}{\log}\, x$

so ist $\quad x = b^y$

$$\frac{d\,x}{d\,y} = b^y \log \text{nat}\, b\,.$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{b^y \log \text{nat}\, b}$$

oder da $b^y = x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d \overset{b}{\log}\, x}{d\,x} = \frac{1}{x \log \text{nat}\, b} \tag{35}$$

Folgerung: $$\frac{\mathbf{d \log nat\, x}}{\mathbf{d\, x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \tag{36}$$

oder $$\mathbf{d \log nat\, x} = \frac{\mathbf{d\, x}}{\mathbf{x}}. \tag{37}$$

Für ein **beliebiges** System lautet diese Gleichung, wenn M den Modulus dieses Systems bezeichnet, da nach (34) $\log x = M \log \text{nat}\, x$:

$$d \log x = M \frac{d\,x}{x}. \tag{38}$$

Die Aenderung des Logarithmus ist also, so lange es sich um sehr kleine Aenderungen, (Differentiale), handelt, der Aenderung der Grundzahl proportional. Hierauf beruht die Einrichtung der Interpolationstäfelchen in den Logarithmentafeln.

§ 31.
Differentiation goniometrischer Funktionen.

1) **Analytisches Winkelmass:** Wir haben in der Elementarmathematik einen Winkel in Graden, Min. und Sek. ausdrücken gelernt, und müssen uns nun zunächst mit einem anderen Winkelmasse bekannt machen. Wir können den zum Winkel gehörigen Bogen, wie als Bruchtheil der Peripherie, so auch, da diese zum Radius in einem constanten Verhältnisse steht, als **Bruchtheil des Radius** ansehen, d. h. wir geben als Winkelmass die Länge des Bogens an, gemessen mit dem Radius als Masseinheit. Unter $x = \frac{1}{100}$ verstehen wir also einen Winkel, dessen Bogen