Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 31. Differentation goniometrischer Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Folgerung: $\frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x$.

Um vom natürlichen Logarithmus auf den Logarithmus eines anderen Systems überzugehen, hat man nach 5)

$$\log \text{nat}\, a = \frac{\log a}{\log e}$$

also $\log a = \log \text{nat}\, a \log e$.

oder für $\log e = M$

$$\log a = \log \text{nat}\, a \,.\, M. \tag{34}$$

Für das Briggische System ist $\overset{10}{\log}\, e = M = 0{,}4342945$. Diese Zahl heisst der Modulus des briggischen Logarithmensystems.

§ 30.
Differentiation logarithmischer Grössen.

Ist $y = \overset{b}{\log}\, x$

so ist $x = b^y$

$$\frac{d\,x}{d\,y} = b^y \log \text{nat}\, b\,.$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{b^y \log \text{nat}\, b}$$

oder da $b^y = x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ d. i. } \frac{d\overset{b}{\log}\, x}{d\,x} = \frac{1}{x \log \text{nat}\, b} \tag{35}$$

Folgerung: $$\frac{\mathbf{d \log nat\, x}}{\mathbf{d\,x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \tag{36}$$

oder $$\mathbf{d \log nat\, x} = \frac{\mathbf{d\,x}}{\mathbf{x}}. \tag{37}$$

Für ein **beliebiges** System lautet diese Gleichung, wenn M den Modulus dieses Systems bezeichnet, da nach (34) $\log x = M \log \text{nat}\, x$:

$$d \log x = M \frac{d\,x}{x}. \tag{38}$$

Die Aenderung des Logarithmus ist also, so lange es sich um sehr kleine Aenderungen, (Differentiale), handelt, der Aenderung der Grundzahl proportional. Hierauf beruht die Einrichtung der Interpolationstäfelchen in den Logarithmentafeln.

§ 31.
Differentiation goniometrischer Funktionen.

1) **Analytisches Winkelmass:** Wir haben in der Elementarmathematik einen Winkel in Graden, Min. und Sek. ausdrücken gelernt, und müssen uns nun zunächst mit einem anderen Winkelmasse bekannt machen. Wir können den zum Winkel gehörigen Bogen, wie als Bruchtheil der Peripherie, so auch, da diese zum Radius in einem constanten Verhältnisse steht, als **Bruchtheil des Radius** ansehen, d. h. wir geben als Winkelmass die Länge des Bogens an, gemessen mit dem Radius als Masseinheit. Unter $x = \frac{1}{100}$ verstehen wir also einen Winkel, dessen Bogen

gleich $\frac{1}{100}$ des Radius ist. Ist der Radius $= 1$ m, so ist $x = 0{,}01$ m; x ist also die Bogenlänge des Winkels für den mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis. Kennen wir die Bogenlänge des Winkels x für einen mit dem Radius R geschriebenen Kreis $=$ s, so erhalten wir die zum Winkel x gehörige Bogenlänge für den Radius $1 = \frac{s}{R}$. Man kann also einen Winkel auch ausdrücken durch das Verhältniss des Bogens zum Radius.

Haben wir in analytischem Masse $x = \frac{1}{100}$, so heisst dies nach Obigem: Der Bogen des Winkels x ist $= \frac{1}{100} R$. Da nun $2 R \cdot \pi = 360^0$, so ist $R = \frac{360^0}{2\pi}$, also $x = \frac{1}{100} \cdot \frac{360^0}{2\pi}$ oder für $\frac{360^0}{2\pi} = \varrho^0$: $x = \frac{1}{100} \varrho^0$, d. h., um aus dem analytischen Winkelmass in Gradmass überzugehen, haben wir mit ϱ^0 zu multipliciren. Um einen in analytischem Masse ausgedrückten Winkel in Sekunden zu erhalten, haben wir zu multipliciren mit $\varrho'' = \frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 206264{.}806$. Umgekehrt erhalten wir das analytische Winkelmass eines in Sekunden ausgedrückten Winkels durch Division mit $\varrho'' = 206264{,}806$.

2) Wir können nunmehr, nach dieser kleinen Abschweifung, zur Differentiation der Winkelfunktionen übergehen:

Ist $y = \sin x$

so ist
$$y + \triangle y = \sin(x + \triangle x)$$
$$= \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x.$$
$$\triangle y = \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x - \sin x$$
$$= \sin x (\cos \triangle x - 1) + \cos x \sin \triangle x.$$

Ist nun ein Winkel sehr klein, so kann man sehr nahe den sinus gleich dem Verhältniss des Bogens zum Radius setzen, wie man leicht begreift. Gehen also $\triangle x$ und $\triangle y$ über in dx und dy, so können wir, wenn wir dx und dy in analytischem Masse ausgedrückt denken, $\sin dx = dx$ setzen, während $\cos dx = 1$ wird. Wir erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:
$$dy = 0 + \cos x \, dx$$
$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \tag{39}$$

3) Ist
$$y = \cos x$$
$$= \sin (90 - x)$$

so ist nach (38)
$$\frac{d \sin (90 - x)}{d (90 - x)} = \cos (90 - x)$$

oder da nach § 18
$$d(90 - x) = - dx$$
$$- \frac{d \sin (90^0 - x)}{dx} = \cos (90 - x)$$

d. h.
$$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x. \tag{40}$$

4) Für tang x findet man durch Differentiation der Gleichung $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x \tag{41}$$

5) und analog für cot x

$$\frac{\mathbf{d\,cot\,x}}{\mathbf{d\,x}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2\,x}} = -\mathbf{(1 + cot^2\,x)}. \tag{42}$$

§ 32.

Differentiation cyclometrischer Funktionen.

Erläuterung: Man versteht unter arc sin x den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen, dessen Sinus $= \mathbf{x}$ ist.

1) Hat man $\quad y = \text{arc sin x}$

so ist $\quad \sin y = x$

also: $\quad \frac{dx}{dy} = \cos x$

$$\frac{dy}{dx},\ \text{d. i. } \frac{d\,\text{arc sin x}}{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\frac{d\,\text{arc sin x}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{43}$$

2) Analog erhält man:

$$\frac{d\,\text{arc cos x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{44}$$

3) Ist $\quad \text{arc tang x} = y$, so ist $x = \text{tang y}$

also $\quad \frac{dx}{dy} = 1 + \text{tang}^2 y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y}$

oder

$$\frac{d\,\text{arc tang x}}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \tag{45}$$

und analog

4)
$$\frac{d\,\text{arc cot x}}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{46}$$

§ 33.

Goniometrische Reihen.

1) **Aufgabe:** Sin x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln.

Es ist $\quad f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = 1.$

Also nach (31)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots \tag{47}$$

Analog findet man

2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots . \tag{48}$$

3) $$\text{tang}\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{3\,.\,5} + \ldots . \tag{49}$$

4) $$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{4\,.\,5} - \ldots . \tag{50}$$