Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 34. Cyclometrische Reihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

§ 34.

Cyclometrische Reihen.

Aufgabe: arc tang x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln:

Die Reihe sei

1) $\text{arc tang}\, x = A + Bx + Cx^2 + \ldots$

Es sind hierin nun die Coefficienten A, B, C zu bestimmen.

Für $x = 0$ folgt $\text{arc tang}\, x = 0$, d. h. $f(0) = 0$, mithin das erste Glied der Mac Laurin'schen Reihe: $A = 0$. Die übrigen Coefficienten B, C etc. entwickeln wir zweckmässiger auf einem anderen Wege: Wir differentiiren Gl. 1) und erhalten:

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

oder wenn wir die Division links ausführen:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

oder

$$1 + 0x - x^2 + 0x^3 + x^4 + \ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

woraus wir zur Bestimmung der Coefficienten B, C, D erhalten:

$$\begin{array}{lll} B = 1, & \text{mithin} & B = 1 \\ 2C = 0 & \;\;\text{,,} & C = 0 \\ 3D = -1 & \;\;\text{,,} & D = -\frac{1}{3} \\ E = 0 & \;\;\text{,,} & E = 0 \end{array}$$

also ist nach 1)

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{51}$$

Diese Reihe kann zur Berechnung der Zahl π benutzt werden.

Es ist nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = 3{,}1415926.$$

§ 35.

Die Taylor'sche Reihe.

Lässt man in $f(x)$ die Variable x um k wachsen, so lässt sich der dadurch entstandene Werth der geänderten Funktion $f(x+k)$ durch eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von k ausdrücken. Es gehen nämlich die durch wiederholtes Differentiiren der Funktion $f(x+k)$ erhaltenen Differentialquotienten $f'(x+k)$, $f''(x+k)$ etc. für $k = 0$ über in

$$f'(0) = f'(x)$$
$$f''(0) = f''(x)$$
etc.

wodurch nach (31) erhalten wird:

$$f(x+k) = f(x) + f'(x)\frac{k}{1} + f''(x)\frac{k^2}{1 \cdot 2} + f'''(x)\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \tag{52}$$