# Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 37. Maxima und Minima

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

§ 36.

## Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten.

Stellen wir uns die Funktion $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve vor, indem wir x als Abscisse, y als Ordinate ansehen, so können wir, indem wir für x nach und nach verschiedene Werthe einsetzen und die zugehörigen Werthe y berechnen, eine beliebige Anzahl von Punkten der Kurve erhalten und diese danach construiren. Ergeben nun die Coordinaten x und y den Punkt A, Fig. 11, $x + \triangle x$ und $y + \triangle y$ den Punkt B der Kurve, so ist $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ die trigonometrische Tangente des von der Sekante AB und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkels. Je kleiner $\triangle x$ und $\triangle y$ angenommen werden, um so mehr rückt B nach A hin, und fällt mit diesem Punkte zusammen, sobald $\triangle x$ und $\triangle y$ der Null gleich werden. In demselben Augenblicke wird die Sekante A B zur Tangente im Punkte A, die Differenzen $\triangle y$ und $\triangle x$ werden zu Differentialen, und der Werth $\frac{dy}{dx}$ stellt die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der in A an die Kurve gezogenen Tangente eingeschlossenen Winkels dar. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist also die Grenze, welcher sich das Verhältniss $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ohne Ende nähert, wenn man $\triangle y$ und $\triangle x$ sich der Null nähern lässt, sie ist gleich dem Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$.

§ 37.

## Maxima und Minima.

Ist $y = f(x)$, so kann es vorkommen, dass für einen gewissen Werth von x y ein Maximum wird, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von x wird y kleiner. Ebenso kann y für einen gewissen Werth von x ein Minimum werden, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von x würde y grösser werden.

Giebt es für x einen bestimmten Werth a, Fig. 12, für welchen y ein Maximum wird, so wird y für jeden grösseren oder kleineren Werth von x abnehmen, die Funktionskurve wird also bei zunehmenden oder abnehmenden x fallen, d. h. sich der Abscissenaxe nähern. Ist x grösser oder kleiner als a, so steigt dagegen die Kurve bei zu- oder abnehmenden x, bis dieses den Werth a erreicht hat. Zugleich erkennen wir aus der Figur, dass die in einem Punkte B an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einen um so kleineren Winkel einschliessen wird, je näher B an den Culminationspunkt A heranrückt, oder je mehr sich die Abscisse x des Punktes B dem Werthe a nähert. In dem Augenblicke, in welchem B in A übergeht, wird dieser Winkel, also auch seine trigonometrische Tangente $= 0$. Wird $x > a$, so fällt die Kurve wieder, der Tangentenwinkel, und mit ihm seine trigonometrische Tangente, wird negativ. Mit anderen Worten: Ist $x < a$, so wird bei zunehmenden x der Differentialquotient der Kurvengleichung abnehmen, bis er für $x = a$ verschwindet. Bei noch weiter zunehmenden x geht er in das Bereich der negativen Grössen über. Stellen wir daher den Differentialquotienten als Funktionscurve dar, so wird diese also bei zunehmenden x fallen, Fig. 13, für $x = a$ die Abscissenaxe schneiden, und für $x > a$ auf die andere, d. h. negative Seite der Abscissenaxe übergehen. Die an diese Kurve gezogenen

Tangenten bilden mit der x Axe sämmtlich negative Winkel, deren trigonometrische Tangenten daher ebenfalls negativ sind, d. h. der Differentialquotient des Differentialquotienten, d. i. der zweite Differentialquotient der Funktion f(x) ist negativ. Hieraus der Satz:

Ist die Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ ein Maximum, so ist der Differentialquotient für $x = a$ gleich 0, $(f'(a) = 0)$, der zweite Differentialquotient $f''(a)$ ist negativ.

Durch ganz analoge Betrachtungen — vergl. Fig. 14a und b, — finden wir den Satz:

Ist $y = f(x)$ für einen gewissen Werth von $x = a$ ein Minimum, so ist $f'(a) = 0$, $f''(a)$ positiv.

Um den Werth von x zu bestimmen, welcher die Funktion $y = f(x)$ zum Maximum oder Minimum macht, werden wir den Differentialquotienten $f'(x) = 0$ setzen und aus der so erhaltenen Gleichung x entwickeln. Für den so gewonnenen Werth von x wird y ein Maximum, wenn $f''(x)$ negativ, ein Minimum, wenn $f''(x)$ positiv ist.

Beispiel 1: Nach § 11 ist die Scheitelgleichung des Kreises: $y^2 = 2rx - x^2$ also $2y\,dy = 2r - 2x\,dx$, woraus $\frac{dy}{dx} = r - x$ erhalten wir. Setzt man $r - x = 0$, so folgt $x = r$. Durch Differentiation der Funktion $\frac{dy}{dx} = r - x$ erhalten wir $f''(x) = -1$, $f''(x)$ ist also negativ, y wird also für $x = r$ ein Maximum.

Beispiel 2: Es sind n Punkte, $P_1\ P_2 - ..\ P_n$ durch ihre Coordinaten gegeben, gesucht ein Punkt P so, dass die Summe der Quadrate der Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten, also $PP_1^2 + PP_2^2 + .. + PP_n^2$ (Fig. 15) ein Minimum werde.

Seien die Coordinaten der gegebenen Punkte $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, ...., des gesuchten Punktes $= x, y$, dann ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$PP_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$
$$PP_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

folglich: $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + \ldots$ Um nun diejenigen Werthe für x und y zu ermitteln, welche $PP_1^2 + PP_2^2 + \ldots = f(x, y)$ zum Minimum machen, differentiiren wir die Gleichung zunächst partiell nach x und erhalten:

$$1)\ \frac{\partial f(x, y)}{dx} = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$$

und setzen den Werth rechts $= 0$, also

$$2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n) = 0$$

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Nunmehr differentiiren wir dieselbe Gleichung partiell nach y, setzen den Differentialquotienten $\frac{\partial f(x, y)}{dy} = 0$, und erhalten analog:

$$y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Aus Gleichung 1) erhält man:

$$\frac{d f(x, y)}{dx} = 2nx - 2(x_1 + x_2 + \ldots)$$

also $$\frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = +2n, \text{ und analog } \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} = +2n.$$

Die 2. Differentialquotienten sind also positiv, woraus folgt, dass f(x, y) für die obigen Werthe von x und y ein Minimum, kein Maximum wird.