UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

B. Parabel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Visual Library

§ 40.

Quadratur der Ellipse.

Schlagen wir über die grosse Axe einen Kreis, bezeichnen die einer und derselben Abscisse x angehörigen Ordinaten des Kreises und der Ellipse mit Y und y, so ist nach der Mittelpunktsgleichung des Kreises und der Ellipse:

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

also
$$y : Y = b : a,$$
für jeden beliebigen Werth von x. Denkt man sich nun unendlich viele Ordinaten in den unendlich kleinen Abständen $d\,x$ gezogen, so werden Kreis und Ellipse in unendlich kleine Rechtecke $Y\,d\,x$ und $y\,d\,x$ zerlegt, und es gilt für jedes Paar derselben die Gleichung

$$y\,d\,x : Y\,d\,x = b : a.$$

Mithin verhält sich, wie sofort erhellt, die Ellipsenfläche zur Kreisfläche

$$f : F = b : a$$

$$f : a^2\pi = b : a$$

$$f = a\,b\,\pi. \qquad (55)$$

B. Parabel.

§ 41.

Subtangente und Subnormale.

Die Subtangente des Punktes $P_{x,\,y}$ findet sich aus der Gleichung der Parabel auf analogem Wege, wie bei der Ellipse:

1) Subtang. $= 2\,x$ (56)

2) Subnorm. $= p.$ (57)

Aus Gleichung 1) ergiebt sich ein leichtes Verfahren, an die Parabel in einem gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

Aus Gl. 2) folgt, dass die Subnormale für alle Punkte constant ist, nämlich $= p$.

§ 42.

Quadratur der Parabel.

Aendert sich in der Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$ die Abscisse x um $\triangle\,x$ und setzt man $x + \triangle\,x = x_1$, so ändert sich die Ordinate y um $\triangle\,y$ und geht in y_1 (Fig. 18) über. Das von den Ordinaten y und y_1 eingeschlossene Trapez ist mit um so grösserer Annäherung gleich dem Flächenabschnitte, welcher von denselben Ordinaten, dem Abscissenabschnitte $\triangle\,x$ und dem Parabelbogen eingeschlossen wird, je kleiner man $\triangle\,x$ nimmt, und wird diesem Flächenabschnitte gleich, wenn $\triangle\,x$ gleich 0 genommen wird. In demselben Moment wird $y = y_1$. Bezeichnet f_1 diesen unendlich kleinen Flächenabschnitt, so ist also

$$1)\ f_1 = y\,d\,x = \sqrt{2\,p\,x}\,.\,d\,x.$$

Ebenso finden wir den unendlich kleinen Flächenabschnitt f_2 in Fig. 18

$$2)\ f_2 = x\,d\,y.$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Durch Differentiation der Parabelgleichung finden wir:

$$2\,y\,d\,y = 2\,p\,d\,x$$

$$d\,y = \frac{p\,d\,x}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

wodurch Gl. 2) übergeht in:

$$3)\ f_2 = x\,\frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x.$$

Setzen wir das uns noch unbekannte Verhältniss $f_1 : f_2 = \frac{1}{n}$, also $n\,f_1 = f_2$, so erhalten wir aus 1) und 3)

$$n\sqrt{2\,p\,x}\,.\,d\,x = \frac{p\,x}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

$$2\,n\,p\,x = p\,x$$

$$n = \frac{1}{2}.$$

Es ist also: $$f_2 = \frac{1}{2}\,f_1.$$

Da man die mit I und II bezeichneten Flächenbschnitte in Fig. 18 als Summe einer unendlichen Zahl solcher kleinen Flächenabschnitte mit der Basis $d\,x$ bezw. $d\,y$ ansehen kann, so folgt, dass die Fläche F_2 des mit II bezeichneten Abschnitts = der Hälfte der Fläche F_1 des mit I bezeichneten Abschnitts sein muss. Die Summe beider Flächen ist aber gleich $x\,y$, daher

$$F_1 = \frac{2}{3}\,x\,y. \tag{58}$$

D. h. die Fläche des von den Coordinaten x und y abgegrenzten Parabelsegments ist gleich dem Rechtecke $\frac{2}{3}\,x\,y$.

C. Krümmungskreise.

§ 43.

Erläuterungen.

Zieht man in zwei Punkten A und B, Fig. 19, einer Kurve an diese Tangenten, so heisst der von diesen eingeschlossene Winkel α die Krümmung des Kurvenbogens A B. Bezeichnet s die Länge des Bogens A B, so heisst $\frac{\alpha}{s}$ die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit.

§ 44.

Krümmungsradius.

1) Ist s der Bogen eines Kreises mit dem Radius r, Fig. 20, so ist $\frac{s}{r}$ ein Mass für den Winkel β, — (vergl. § 31, 1) —, oder da $\alpha = \beta$, auch für den Winkel α. Die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit ist also $= \frac{1}{r}$. Die Reciproke des Radius ist also ein Mass für dieselbe.