Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 44. Krümmungsradius

Durch Differentiation der Parabelgleichung finden wir:

$$2\,y\,d\,y = 2\,p\,d\,x$$

$$d\,y = \frac{p\,d\,x}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

wodurch Gl. 2) übergeht in:

$$3)\quad f_2 = x\,\frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x.$$

Setzen wir das uns noch unbekannte Verhältniss $f_1 : f_2 = \frac{1}{n}$, also $n\,f_1 = f_2$, so erhalten wir aus 1) und 3)

$$n\sqrt{2\,p\,x}\,.\,d\,x = \frac{p\,x}{\sqrt{2\,p\,x}}\,.\,d\,x$$

$$2\,n\,p\,x = p\,x$$

$$n = \frac{1}{2}.$$

Es ist also: $$f_2 = \frac{1}{2}\,f_1.$$

Da man die mit I und II bezeichneten Flächenbschnitte in Fig. 18 als Summe einer unendlichen Zahl solcher kleinen Flächenabschnitte mit der Basis $d\,x$ bezw. $d\,y$ ansehen kann, so folgt, dass die Fläche F_2 des mit II bezeichneten Abschnitts = der Hälfte der Fläche F_1 des mit I bezeichneten Abschnitts sein muss. Die Summe beider Flächen ist aber gleich $x\,y$, daher

$$F_1 = \frac{2}{3}\,x\,y. \tag{58}$$

D. h. die Fläche des von den Coordinaten x und y abgegrenzten Parabelsegments ist gleich dem Rechtecke $\frac{2}{3}\,x\,y$.

C. Krümmungskreise.

§ 43.

Erläuterungen.

Zieht man in zwei Punkten A und B, Fig. 19, einer Kurve an diese Tangenten, so heisst der von diesen eingeschlossene Winkel α die Krümmung des Kurvenbogens A B. Bezeichnet s die Länge des Bogens A B, so heisst $\frac{\alpha}{s}$ die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit.

§ 44.

Krümmungsradius.

1) Ist s der Bogen eines Kreises mit dem Radius r, Fig. 20, so ist $\frac{s}{r}$ ein Mass für den Winkel β, — (vergl. § 31, 1) —, oder da $\alpha = \beta$, auch für den Winkel α. Die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit ist also $= \frac{1}{r}$. Die Reciproke des Radius ist also ein Mass für dieselbe.

Da hiernach die Krümmung nur vom Radius r abhängt, so ist dieselbe beim Kreise constant. Der Radius heisst in seiner Eigenschaft als Mass der Krümmung „Krümmungsradius“.

2) Unter der Krümmung einer Kurve in einem bestimmten Punkte P versteht man die Krümmung eines diesen Punkt enthaltenden unendlich kleinen Kurvenbogens. Sind a und b, Fig. 21, die Endpunkte dieses Bogens, d s, (Bogendifferential), dessen Länge, τ der Winkel, den die in a an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist, wie sofort erhellt, die Krümmung $d\tau$ des Bogens $\widehat{ab}$ gleich der Aenderung, welche τ erleidet, wenn der Berührungspunkt a der Tangente nach b rückt, oder wenn x und y sich um d x und d y ändern, d. h. $d\tau$ ist das Differential des Winkels τ. Die durchschnittliche Krümmung des Bogens a b ist gleich $\frac{d\tau}{ds}$. Bezeichnet r den Radius eines Kreises von gleicher Krümmung, so ist also

$$\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds}$$

$$r = \frac{ds}{d\tau}. \qquad (59)$$

Dieser Radius heisst Krümmungsradius der Kurve im Punkte P, der damit beschriebene Kreis heisst Krümmungskreis. Es ist dies also derjenige Kreis, welcher mit der Kurve im Punkte P auf eine sehr kleine Strecke a b zur Deckung gebracht werden kann. Denkt man sich in den einander unendlich nahe gelegenen Punkten a und b zu den Tangenten Senkrechte errichtet, so ist der Durchschnitt derselben der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und seine Entfernung von a und b der Krümmungsradius.

Das Differential des Bogens d s kann als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten d x und d y angesehen werden, also ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

1) $$ds = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \cdot dx$$

Ferner ist: 2) $$\operatorname{tang}\tau = \frac{dy}{dx}$$

also $$d\operatorname{tang}\tau = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

oder nach (41) 3) $$d\tau \cdot \frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

$$d\tau = \cos^2\tau \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

oder da $$\cos^2\tau = \frac{\cos^2\tau}{\sin^2\tau + \cos^2\tau} = \frac{1}{\frac{\sin^2\tau}{\cos^2\tau} + 1} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2\tau}$$

$$d\tau = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2\tau} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

daher nach 2) $$d\tau = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Setzt man 1) und 2) in (59) ein, so erhält man:

$$r = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2} \cdot d\,x \left(1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right)}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2} \cdot d\,x}$$

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}} \tag{60}$$

Beispiel: Eine Kurve durch ihre Gleichung

$$y = m\,x^3$$

gegeben, den Krümmungsradius derselben in dem Punkte $P_{x,\,y}$ zu finden.

Es ist:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 3\,m\,x^2$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 6\,m\,x$$

also

$$r = \frac{[1 + (3\,m\,x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{6\,m\,x} = \frac{(1 + 9\,m^2\,x^4)^{\frac{3}{2}}}{6\,m\,x}$$

Für $x = 0$ erhalten wir hieraus $r = \infty$.

3) Der Krümmungsradius der Parabel für den gegebenen Punkt $P_{x,\,y}$ lässt sich zwar leicht nach derselben Formel finden, da aber ein anderer Weg, auf welchem man zum Krümmungsradius gelangen kann, sich für die Parabel besonders einfach gestaltet, so soll derselbe hier noch erläutert werden.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normale für den Punkt P_1 seien Y_1, X_1, Fig. 22, dann ist, wenn $y_1\,x_1$ die Coordinaten des Punktes P_1 selbst bezeichnen:

$$X_1 = x_1 + p - Y_1 \tang \tau$$

oder da $\tang \tau = \frac{p}{y_1}$, (worin p die Subnormale, vergl. (57))

$$\text{I)}\quad X_1 = x_1 + p - Y_1 \frac{p}{y_1}.$$

Entsprechend lautet die Gleichung der Normale für einen zweiten Punkt P_2 der Parabel

$$\text{II)}\quad X_2 = x_2 + p - Y_2 \frac{p}{y_2}$$

Für den Durchschnittspunkt M beider Normalen muss sich aus beiden Gleichungen für die Coordinaten derselbe Werth ergeben, es ist also in beiden Gleichungen $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ zu setzen, wofür wir einfach X und Y schreiben wollen, wo also X und Y die Coordinaten des Punktes M bezeichnen. Demnach erhalten wir aus beiden Gleichungen für den Durchschnittspunkt M:

$$x_1 - Y \frac{p}{y_1} = x_2 - Y \frac{p}{y_2}$$

oder:

$$Y\left(\frac{p}{y_2} - \frac{p}{y_1}\right) = x_2 - x_1$$

$$Y\,p\left(\frac{y_1 - y_2}{y_1\,y_2}\right) = x_2 - x_1$$

$$Y = -\frac{(x_2 - x)}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_2\,y_1}{p}$$

oder wenn α den von der Sehne $P_1\,P_2$ und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$1)\quad Y = -\frac{y_1\,y_2}{p} \cot \alpha$$

Für X ergiebt sich durch Einsetzen dieses Werthes in eine der obigen Gleichungen I und II

$$2)\quad X = p + x_2 + y_1 \cot \alpha.$$

Rückt nun P_2 unendlich nahe an P_1, so wird $y_1 = y_2$, die Sehne $P_1\,P_2$ wird zur Tangente in P_1, α wird $= \tau$, $\tang \alpha$ wird $= \frac{p}{y}$ (dem Differentialquotienten der Parabelgleichung), Gl. 1) geht daher über in:

$$3)\quad Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

und Gl. 2), da $y \cot \alpha$ gleich der Subtangente, $= 2x$ (§ 41)

$$4)\ X = p + 3x.$$

Somit haben wir die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises für den Punkt P. Aus diesen Coordinaten und aus denen des Punktes P selbst erhalten wir nach dem pythagoräischen Lehrsatze (unter Berücksichtigung des Vorzeichens von Y):

$$\varrho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2$$

$$= (p + 2x)^2 + \left(y + \frac{y^3}{p^2}\right)^2$$

oder da nach der Parabelgleichung $y^2 = 2px$, also $2x = \frac{y^2}{p}$,

$$\varrho^2 = \frac{(p^2 + y^2)^3}{p^4}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{(p^2 + y^2)^3}}{p^2}$$

worin der Zähler gleich der Normale.

Zusatz. Den kleinsten Krümmungsradius der Parabel findet man, indem man in dieser Gleichung $y = 0$ setzt:

$$r = p.$$

Da y nur für den Scheitel der Parabel $= 0$ ist, so ist der Krümmungsradius für den Scheitel der kleinste Krümmungsradius der Parabel.