Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt I. Astronomische Begriffe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

I. Astronomische Begriffe.

§ 1.

Die Himmelskugel.

Die Himmelskugel, d. i. die scheinbare Kugel, in deren Mittelpunkte 0, Fig. 23, ein Beobachter zu stehen glaubt, und auf deren innerer Seite er die Sterne erblickt, wird durch die horizontale Ebene N S in zwei Hälften, eine obere sichtbare und eine unsichtbare getheilt. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der scheinbaren Oberfläche der Himmelskugel heisst Horizont des Beobachters. Eine im Standpunkte 0 des Beobachters zur Ebene des Horizonts errichtete Senkrechte trifft die Kugeloberfläche in den Punkten Z, dem Zenith, und Z′, dem Nadir. Steht in T ein Stern, so heisst der Bogen Z T seine Zenithdistanz, der Bogen T T′ seine Höhe. Ein durch T parallel zum Horizont gelegter Kreis heisst ein Almukantarat.

Sämmtliche Sterne beschreiben infolge der Drehung der Erde um ihre Axe P P′ scheinbar parallele Kreise, Parallelkreise, welche zu dieser Axe senkrecht stehen. Das ganze Himmelsgewölbe scheint sich um diese Axe zu drehen. Die allein ruhenden Endpunkte P und P′ dieser Axe heissen Pole, (Himmelspole). Der durch P, Z und P′ gelegte grösste Kugelkreis heisst Meridian des Beobachtungsortes. Die Linie N S, in welcher die Meridianebene die Ebene des Horizonts schneidet, heisst Mittagslinie, der Kreisbogen N P die Polhöhe des Beobachtungsortes.

Der Ort des Sternes T ist bekannt, wenn man seine Höhe T T′ und den Winkel N 0 T′ kennt. Dieser letztere Winkel, welchen der durch T gelegte Höhenkreis mit dem Meridian einschliesst, heisst Azimut des Sternes T. Er wird von den Geodäten, von der Nordlinie 0 N beginnend, rechts herum gezählt.

Jeder Stern hat auf dem Parallelkreise, auf welchem er sich scheinbar bewegt, einen höchsten und einen tiefsten Punkt, obere und untere Culmination. Beide liegen im Meridian, in der Fig. B und B′. Diejenigen Sterne, deren untere Culmination über dem Horizonte liegt, also für den Beobachter sichtbar ist, heissen Circumpolarsterne. Alle anderen Sterne gehen für den Beobachtungsort auf und unter. Der sichtbare Theil ihrer scheinbaren Bahn heisst Tagbogen, der unsichtbare Nachtbogen. Ein Almukantarat wird von dem Tagbogen in zwei Punkten geschnitten. Der Bogen des Parallelkreises sowohl, als des Almukantarats, welcher zwischen diesen beiden Punkten liegt, wird durch den Meridian halbirt. Die Durchschnittspunkte des grössten Parallelkreises, — Aequators, — mit dem grössten Almukantarat, — Horizont, — heissen Ost- und Westpunkt. In der Figur ist nur der letztere, W, sichtbar. Der Tagbogen des Aequators ist gleich dem Nachtbogen, daher Tag- und Nachtgleiche, wenn die Sonne im Aequator steht. Der Bogen A S heisst Aequatorhöhe, der Bogen A B = T U heisst Deklination des im Parallelkreise B T B′ sich bewegenden Sternes. Der durch P und T gelegte grösste Kugelkreis schneidet den Aequator rechtwinklig in U. Die Entfernung des Punktes U von einem bestimmten Punkte des Aequators, (♈ in der Figur) dem Frühlingspunkte, heisst Rectascension. Diese und die Deklination bilden zusammen die Aequatorcoordinaten, durch welche der Ort des Sternes T bekannt ist. Mit dem Frühlingspunkte hat es folgende Bewandtniss: Da die Erde sich um die Sonne bewegt, so wird Letztere, von der Erde aus gesehen, scheinbar einen Kreis am Himmelsgewölbe beschreiben und alljährlich einmal durchlaufen, welcher in der Ebene der Erdbahn liegt. Dieser Kreis, Ekliptik oder Thierkreis, würde in die Ebene des Aequators fallen, wenn die Erdaxe senkrecht zu ihrer Bahn um die Sonne stände. Da in Wirklichkeit die Erdaxe gegen die Erdbahn geneigt, so wird auch die Aequatorebene gegen die Ekliptik eine Neigung (von $23^1/_2{}^0$) haben. Aequator und Ekliptik fallen also nicht zusammen, sondern schneiden sich gegenseitig in zwei Punkten, dem Frühlings- und Herbstpunkte. Im Frühlingspunkte steht die Sonne zu Frühlingsanfang, sie steht also zu dieser Zeit im Aequator, ihre Deklination ist $= 0$. Allmählich entfernt sie sich dann immer mehr vom Aequator, bis sie nach 3 Monaten die grösste Deklination von ca. $23^1/_2{}^0$ erreicht hat. Hier scheint sie kurze Zeit Halt zu machen, (Sommersolstitium) und beginnt dann sich dem Aequator wieder zu nähern, bis sie nach weiteren drei Monaten denselben im Herbstpunkte schneidet. Nun wird die Deklination negativ, bis sie $-23^1/_2{}^0$ erreicht, (Wintersolstitium), worauf sich die Sonne wieder dem Aequator nähert. Die Aenderung der Sonnendeklination in einer bestimmten Zeiteinheit, z. B. in einer Stunde, ist am grössten in der Nähe des Aequators, und kommt in der Nähe der Solstitien der Null nahe.

Steht die Sonne im Frühlings- oder Herbstpunkte, so sind Tag und Nacht gleich. Sonnen-Auf- und -Untergang erfolgen genau im Ost- und Westpunkte. Diese Punkte erhält man, wenn man auf die Mittagslinie in 0 ein Loth errichtet und dasselbe nach beiden Seiten hin bis zum Durchschnitte mit dem Horizont verlängert. Bei zunehmender Deklination rücken die Punkte, in welchen die Sonne auf- und untergeht, mehr nach Norden. Der Stern T geht z. B. in B′′ unter. Der Winkel S 0 B′′ heisst Abendweite des Sterns.

§ 2.

Geographische Ortsbestimmung.

1) **Der Längenunterschied** zweier Orte auf der Erde ergiebt sich aus deren Zeitunterschieden. Da die Erde sich in 4 Minuten um 1^0 um ihre Axe dreht, so entspricht ein Zeitunterschied von 4 Minuten einem Längenunterschiede von 1^0. Der Schiffer bedient sich daher eines Chronometers, das genau die Zeit eines bestimmten Ortes, z. B. Berlin, angiebt. Um dassselbe zu controlliren, bedarf es von Zeit zu Zeit astronomischer Beobachtungen. Kennt man die Zeit, in welcher ein bestimmtes astronomisches Ereigniss für einen Ort A, z. B. Berlin, eintreten muss, (z. B. die Verfinsterung eines Jupitertrabanten), und beobachtet man die Zeit, in welcher eben dieses Ereigniss in B eintritt, so ist der Zeitunterschied beider Orte bekannt.

2) **Die geographische Breite** ist, wie man leicht erkennt, gleich der Polhöhe des betreffenden Ortes*). Stünde daher in der Verlängerung der Erdaxe ein

*) Stellt Fig. 23 die Erde dar, so ist die Breite des Beobachtungsortes $Z = A\,0\,Z$. Die Polhöhe ist $= \angle P\,0\,N$. Jeder dieser beiden Winkel wird durch $P\,0\,Z$ zu 90^0 ergänzt, mithin sind die Winkel gleich.

Stern, so brauchte man nur dessen Höhe über dem Horizonte zu messen, um die Breite zu erhalten. Da dies nicht der Fall, — denn auch der Polarstern liegt bekanntlich nicht genau in der Himmelsaxe, — so hat man die obere und untere Culmination irgend eines Circumpolarsterns zu beobachten, und aus beiden Beobachtungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Beide Beobachtungen sind jedoch zuvor wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu verbessern, da diese die gemessenen Elevationen zu gross erscheinen lässt. Diese Correktion beträgt bei einer beobachteten Höhe von

50^0	in Sekunden:	48,4
51^0	„ „	46,7
52^0	„ „	45.1
53^0	„ „	43,5
54^0	„ „	41,9
55^0	„ „	40,4.

Die so gewonnene Breite ist die elliptische — vergl. § 30 —, aus welcher sich die geocentrische nach (147) ergiebt.

§ 3.

Bestimmung der Mittagslinie.

Soll die Neigung einer auf der Erdoberfläche gegebenen Strecke A B gegen die Mittagslinie gefunden werden, so stellt man einen Theodolit vormittags in A auf, stellt das Fadenkreuz auf B ein, und sodann, nach Ablesung der Nonien, auf die Sonne, welche man derart anvisirt, dass beide Fäden des Fadenkreuzes die Ränder der Sonne tangiren, worauf man die Nonien des Horizontal- und Verticalkreises abliest. Zugleich notirt man die Zeit dieser Beobachtung nach einer gewöhnlichen, nur einigermassen richtig gehenden Uhr. Man kennt dann ungefähr die Zeit, um welche die Sonne am Nachmittage wieder in derselben Höhe stehen wird. Vor Ablauf derselben begiebt man sich wieder auf den Punkt A, wiederholt zunächst die Visur nach B, liest die Nonien des Horizontalkreises ab, stellt den Verticalkreis auf die vormittags gemachte Ablesung ein, und visirt nun die Sonne derart an, dass der Verticalfaden den entgegengesetzten Sonnenrand berührt, als bei der vormittäglichen Beobachtung. So begleitet man die Sonne, bis dieselbe auch den Horizontalfaden wieder berührt, worauf der Horizontalkreis gebremst und die Nonien abgelesen werden. (Bei genaueren Beobachtungen auch die Uhr.) War nun die Ablesung vormittags $= A$, nachmittags $= A'$, so liegt die Südrichtung des Meridians in der Richtung $\frac{A + A'}{2}$, wie sofort erhellt, wenn man bedenkt, dass der Bogen eines Almukantarats, welcher zwischen den Durchschnittspunkten der scheinbaren Sternbahn liegt, durch den Meridian halbirt wird.

Natürlich wird man schon vormittags die Beobachtungen in kleinen Zwischenräumen wiederholen und dann nachmittags die correspondierenden Beobachtungen vornehmen, um schliesslich aus den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel zu bilden.

Bei genaueren Beobachtungen ist dem Resultate noch eine Verbesserung wegen der Aenderung der Sonnendeklination anzubringen. Ist in Fig. 24 A der Standpunkt der Sonne während der Beobachtung vormittags, so würde der Almukantarat A C A' nachmittags von der Sonne in A' geschnitten werden, wenn **keine**

Aenderung der Sonnendeklination stattfände. Es fragt sich nun, wie viel ändert sich der Winkel $C M A' = \alpha$, wenn sich die Deklination $J E B = D$ um den kleinen Betrag $d D$ ändert?

Bezeichnet h die Höhe des Almukantarats, und setzt man den scheinbaren Radius der Himmelskugel $r = 1$, so ist der Radius des Almukantarats, wie leicht ersichtlich:

$$M A' = M C = r \cos h = \cos h.$$

Ferner $$M F = M A' \cos \alpha = \cos h \cos \alpha.$$

Ist $\varphi = M E J = M G F$ die geographische Bereite des Beobachtungsortes so ist $$M G = M F \cot \varphi = \cos h \cos \alpha \cot \varphi .$$

und $$G E = M E - M G$$
$$= \sin h - \cos h \cos \alpha \cot \varphi.$$

Weiter ist $$K E = G E \sin \varphi = \sin h \,.\, \sin \varphi - \cos h \cos \alpha \cos \varphi$$

oder da $K E = r \sin K B E = \sin D$
$$\sin D = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos \alpha$$

und wenn wir nach α differentiiren:
$$d D \cos D = \cos h \cos \varphi \sin \alpha \, d \alpha$$

also $$\text{I} \qquad d \alpha = \frac{d D \cos D}{\cos \varphi \cos h \sin \alpha}.$$

Um unsere Figur nicht durch weitere Hilfsconstruktionen zu verwirren, gehen wir auf Fig. 25 über*), wo wir sofort erkennen, dass $\alpha = S E A''$, $\sin \alpha = \cos A' E W$, wo W den Durchschnitt des Aequators mit dem Horizont (Westpunkt) bezeichnet. Der Bogen $A' A''$ ist die Beobachtungshöhe h. In dem bei A'' rechtwinkligen sphärischen Dreieck $A' A'' W$ ist nach (5) $\cos A' A'' \cos A'' W = \cos A' W$ oder
$$\text{II} \quad \cos h \sin \alpha = \cos A' W.$$

Zieht man den grössten Kugelkreis $A' H P$, so ist das sphärische Dreieck $A' H W$ bei H rechtwinklig und es ist:
$$\cos A' H \,.\, \cos H W = \cos A' W$$

oder da $A' H = D$
$$\text{III} \quad \frac{\cos D}{\cos A' W} = \frac{1}{\cos H W} = \frac{1}{\sin H J}.$$

Aus I und II erhalten wir:
$$d \alpha = \frac{d D}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos D}{\cos A' W}$$

oder nach III
$$\text{IV} \quad d \alpha = \frac{d D}{\cos \varphi \sin H J}.$$

Es ist aber $\sin H J = \sin A' B$. Der Bogen $A' B$ stellt den in der halben Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen vor- und nachmittags zurückgelegten Weg der Sonne dar. Ist die halbe Zwischenzeit, in Zeitminuten ausgedrückt, $= t$, die Aenderung der Sonnendeklination pro Zeitminute $= d$, so ist die Aenderung der Deklination während der ganzen Zwischenzeit $d D = 2 t d$. Da nun die Sonne in einer Zeitminute einen Bogen von $15'$ zurücklegt, so ist der in der halben Zwischen-

*) In dieser Figur ist die Deklination J B negativ dargestellt, d. h. der Parallelkreis der scheinbaren Sonnenbahn liegt unterhalb des Aequators, weil uns scheint, dass die Figur dadurch anschaulicher wird.

zeit zurückgelegte Weg $= 15\,t'$, also der Bogen $A'B = 15\,t'$. Wir erhalten daher aus Formel IV:

$$d\,\alpha = \frac{2\,t\,d}{\cos\varphi\,\sin 15\,t'}.$$

Dieser Winkel ist von der nachmittäglichen Beobachtung **ganz**, oder, was dasselbe ist, vom Mittel $\frac{A + A'}{2}$ zur Hälfte in Abzug zu bringen. Die Correktion lautet also

$$d\,\alpha = \frac{t\,d}{\cos\varphi\,\sin 15\,t'}.$$

Die Aenderung der Deklination pr. Zeitminute beträgt in Sekunden:

am	1. Januar	+ 0,20	am	1. Juli	— 0,15
	1. Februar	+ 0,72		1. Aug.	— 0,62
	1. März	+ 0,95		1. Sept.	— 0,93
	20. März	+ 0,99		20. Sept.	— 0,98
	1. April	+ 0,95		1. Okt.	— 0,97
	1. Mai	+ 0,72		1. Nov.	— 0,80
	1. Juni	+ 0,34		1. Dec.	— 0,40

Der nach Anleitung dieses § beobachtete Winkel zählt von der Strecke AB, deren Neigung gegen die Mittagslinie zu bestimmen war, rechts herum bis in die Südrichtung der Mittagslinie. Hieraus kann die Neigung im Sinne der Geodäten, d. h. der von der Nordrichtung der Mittagslinie rechts herum bis zur Strecke AB zählende Winkel leicht gefunden werden.

II. Methode der kleinsten Quadrate.

§ 4.

Princip.

Bei wiederholter Messung einer und derselben Grösse werden wir infolge der unvermeidlichen, in der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente begründeten kleinen Messungsfehler, lauter um ein Geringes von einander abweichende Resultate erzielen, und es entsteht uns nun die Aufgabe, aus allen diesen verschiedenen Resultaten denjenigen Werth zu finden, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, dass er dem wahren Werthe der gemessenen Grösse am nächsten komme.

Wir sind gewöhnt, und es entspricht dies einem gewissen praktischen Gefühle, das arithmetische Mittel aus allen direkten Beobachtungen als einen, dem wahren Werthe der gemessenen Grösse sehr nahe kommenden Werth anzusehen. Das arithmetische Mittel hat nun folgende sehr merkwürdige Eigenschaft:

Bezeichnen wir die durch Messung gewonnenen Grössen mit $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Grösse mit x, die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, um zum Werthe x zu gelangen, mit $v_1\ v_2 \ldots v_n$, so dass also

$$x - l_1 = v_1$$
$$x - l_2 = v_2$$
etc.