Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 3. Bestimmung der Mittagslinie

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Stern, so brauchte man nur dessen Höhe über dem Horizonte zu messen, um die Breite zu erhalten. Da dies nicht der Fall, — denn auch der Polarstern liegt bekanntlich nicht genau in der Himmelsaxe, — so hat man die obere und untere Culmination irgend eines Circumpolarsterns zu beobachten, und aus beiden Beobachtungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Beide Beobachtungen sind jedoch zuvor wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu verbessern, da diese die gemessenen Elevationen zu gross erscheinen lässt. Diese Correktion beträgt bei einer beobachteten Höhe von

50^0	in Sekunden:	48,4
51^0	„ „	46,7
52^0	„ „	45.1
53^0	„ „	43,5
54^0	„ „	41,9
55^0	„ „	40,4.

Die so gewonnene Breite ist die elliptische — vergl. § 30 —, aus welcher sich die geocentrische nach (147) ergiebt.

§ 3.

Bestimmung der Mittagslinie.

Soll die Neigung einer auf der Erdoberfläche gegebenen Strecke A B gegen die Mittagslinie gefunden werden, so stellt man einen Theodolit vormittags in A auf, stellt das Fadenkreuz auf B ein, und sodann, nach Ablesung der Nonien, auf die Sonne, welche man derart anvisirt, dass beide Fäden des Fadenkreuzes die Ränder der Sonne tangiren, worauf man die Nonien des Horizontal- und Verticalkreises abliest. Zugleich notirt man die Zeit dieser Beobachtung nach einer gewöhnlichen, nur einigermassen richtig gehenden Uhr. Man kennt dann ungefähr die Zeit, um welche die Sonne am Nachmittage wieder in derselben Höhe stehen wird. Vor Ablauf derselben begiebt man sich wieder auf den Punkt A, wiederholt zunächst die Visur nach B, liest die Nonien des Horizontalkreises ab, stellt den Verticalkreis auf die vormittags gemachte Ablesung ein, und visirt nun die Sonne derart an, dass der Verticalfaden den entgegengesetzten Sonnenrand berührt, als bei der vormittäglichen Beobachtung. So begleitet man die Sonne, bis dieselbe auch den Horizontalfaden wieder berührt, worauf der Horizontalkreis gebremst und die Nonien abgelesen werden. (Bei genaueren Beobachtungen auch die Uhr.) War nun die Ablesung vormittags $= A$, nachmittags $= A'$, so liegt die Südrichtung des Meridians in der Richtung $\frac{A + A'}{2}$, wie sofort erhellt, wenn man bedenkt, dass der Bogen eines Almukantarats, welcher zwischen den Durchschnittspunkten der scheinbaren Sternbahn liegt, durch den Meridian halbirt wird.

Natürlich wird man schon vormittags die Beobachtungen in kleinen Zwischenräumen wiederholen und dann nachmittags die correspondierenden Beobachtungen vornehmen, um schliesslich aus den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel zu bilden.

Bei genaueren Beobachtungen ist dem Resultate noch eine Verbesserung wegen der Aenderung der Sonnendeklination anzubringen. Ist in Fig. 24 A der Standpunkt der Sonne während der Beobachtung vormittags, so würde der Almukantarat A C A′ nachmittags von der Sonne in A′ geschnitten werden, wenn **keine**

Aenderung der Sonnendeklination stattfände. Es fragt sich nun, wie viel ändert sich der Winkel $C M A' = \alpha$, wenn sich die Deklination $J E B = D$ um den kleinen Betrag $d D$ ändert?

Bezeichnet h die Höhe des Almukantarats, und setzt man den scheinbaren Radius der Himmelskugel $r = 1$, so ist der Radius des Almukantarats, wie leicht ersichtlich:

$$M A' = M C = r \cos h = \cos h.$$

Ferner $\quad M F = M A' \cos \alpha = \cos h \cos \alpha.$

Ist $\varphi = M E J = M G F$ die geographische Bereite des Beobachtungsortes so ist $\quad M G = M F \cot \varphi = \cos h \cos \alpha \cot \varphi$.

und
$$G E = M E - M G$$
$$= \sin h - \cos h \cos \alpha \cot \varphi.$$

Weiter ist $\quad K E = G E \sin \varphi = \sin h \,.\, \sin \varphi - \cos h \cos \alpha \cos \varphi$

oder da $K E = r \sin K B E = \sin D$

$$\sin D = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos \alpha$$

und wenn wir nach α differentiiren:

$$d D \cos D = \cos h \cos \varphi \sin \alpha \, d \alpha$$

also
$$\text{I} \qquad d \alpha = \frac{d D \cos D}{\cos \varphi \cos h \sin \alpha}.$$

Um unsere Figur nicht durch weitere Hilfsconstruktionen zu verwirren, gehen wir auf Fig. 25 über*), wo wir sofort erkennen, dass $\alpha = S E A''$, $\sin \alpha = \cos A' E W$, wo W den Durchschnitt des Aequators mit dem Horizont (Westpunkt) bezeichnet. Der Bogen $A' A''$ ist die Beobachtungshöhe h. In dem bei A'' rechtwinkligen sphärischen Dreieck $A' A'' W$ ist nach (5) $\cos A' A'' \cos A'' W = \cos A' W$ oder

$$\text{II} \quad \cos h \sin \alpha = \cos A' W.$$

Zieht man den grössten Kugelkreis $A' H P$, so ist das sphärische Dreieck $A' H W$ bei H rechtwinklig und es ist:

$$\cos A' H \,.\, \cos H W = \cos A' W$$

oder da $A' H = D$

$$\text{III} \quad \frac{\cos D}{\cos A' W} = \frac{1}{\cos H W} = \frac{1}{\sin H J}.$$

Aus I und II erhalten wir:

$$d \alpha = \frac{d D}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos D}{\cos A' W}$$

oder nach III

$$\text{IV} \quad d \alpha = \frac{d D}{\cos \varphi \sin H J}.$$

Es ist aber $\sin H J = \sin A' B$. Der Bogen $A' B$ stellt den in der halben Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen vor- und nachmittags zurückgelegten Weg der Sonne dar. Ist die halbe Zwischenzeit, in Zeitminuten ausgedrückt, $= t$, die Aenderung der Sonnendeklination pro Zeitminute $= d$, so ist die Aenderung der Deklination während der ganzen Zwischenzeit $d D = 2 t d$. Da nun die Sonne in einer Zeitminute einen Bogen von 15′ zurücklegt, so ist der in der halben Zwischen-

*) In dieser Figur ist die Deklination $J B$ negativ dargestellt, d. h. der Parallelkreis der scheinbaren Sonnenbahn liegt unterhalb des Aequators, weil uns scheint, dass die Figur dadurch anschaulicher wird.

zeit zurückgelegte Weg $= 15\,t'$, also der Bogen $A'B = 15\,t'$. Wir erhalten daher aus Formel IV:

$$d\,\alpha = \frac{2\,t\,d}{\cos\varphi \sin 15\,t'}.$$

Dieser Winkel ist von der nachmittäglichen Beobachtung **ganz**, oder, was dasselbe ist, vom Mittel $\frac{A + A'}{2}$ zur Hälfte in **Abzug** zu bringen. Die Correktion lautet also

$$d\,\alpha = \frac{t\,d}{\cos\varphi \sin 15\,t'}.$$

Die **Aenderung** der Deklination pr. Zeitminute beträgt in Sekunden:

am	1. Januar	+ 0,20	am	1. Juli	— 0,15
	1. Februar	+ 0,72		1. Aug.	— 0,62
	1. März	+ 0,95		1. Sept.	— 0,93
	20. März	+ 0,99		20. Sept.	— 0,98
	1. April	+ 0,95		1. Okt.	— 0,97
	1. Mai	+ 0,72		1. Nov.	— 0,80
	1. Juni	+ 0,34		1. Dec.	— 0,40

Der nach Anleitung dieses § beobachtete Winkel zählt von der Strecke A B, deren Neigung gegen die Mittagslinie zu bestimmen war, rechts herum bis in die Südrichtung der Mittagslinie. Hieraus kann die Neigung im Sinne der Geodäten, d. h. der von der Nordrichtung der Mittagslinie rechts herum bis zur Strecke A B zählende Winkel leicht gefunden werden.

II. Methode der kleinsten Quadrate.

§ 4.

Princip.

Bei wiederholter Messung einer und derselben Grösse werden wir infolge der unvermeidlichen, in der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente begründeten kleinen Messungsfehler, lauter um ein Geringes von einander abweichende Resultate erzielen, und es entsteht uns nun die Aufgabe, aus allen diesen verschiedenen Resultaten denjenigen Werth zu finden, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, dass er dem wahren Werthe der gemessenen Grösse am nächsten komme.

Wir sind gewöhnt, und es entspricht dies einem gewissen praktischen Gefühle, das arithmetische Mittel aus allen direkten Beobachtungen als einen, dem wahren Werthe der gemessenen Grösse sehr nahe kommenden Werth anzusehen. Das arithmetische Mittel hat nun folgende sehr merkwürdige Eigenschaft:

Bezeichnen wir die durch Messung gewonnenen Grössen mit $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Grösse mit x, die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, um zum Werthe x zu gelangen, mit $v_1\ v_2 \ldots v_n$, so dass also

$$x - l_1 = v_1$$
$$x - l_2 = v_2$$
etc.