Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt II. Methode der kleinsten Quadrate.

zeit zurückgelegte Weg = 15 t′, also der Bogen A′ B = 15 t′. Wir erhalten daher aus Formel IV:

$$d\,\alpha = \frac{2\,t\,d}{\cos\varphi\,\sin 15\,t'}.$$

Dieser Winkel ist von der nachmittäglichen Beobachtung **ganz**, oder, was dasselbe ist, vom Mittel $\frac{A + A'}{2}$ zur Hälfte in **Abzug** zu bringen. Die Correktion lautet also

$$d\,\alpha = \frac{t\,d}{\cos\varphi\,\sin 15\,t'}.$$

Die Aenderung der Deklination pr. Zeitminute beträgt in Sekunden:

am	1. Januar	+ 0,20	am	1. Juli	— 0,15
	1. Februar	+ 0,72		1. Aug.	— 0,62
	1. März	+ 0,95		1. Sept.	— 0,93
	20. März	+ 0,99		20. Sept.	— 0,98
	1. April	+ 0,95		1. Okt.	— 0,97
	1. Mai	+ 0,72		1. Nov.	— 0,80
	1. Juni	+ 0,34		1. Dec.	— 0,40

Der nach Anleitung dieses § beobachtete Winkel zählt von der Strecke A B, deren Neigung gegen die Mittagslinie zu bestimmen war, rechts herum bis in die Südrichtung der Mittagslinie. Hieraus kann die Neigung im Sinne der Geodäten, d. h. der von der Nordrichtung der Mittagslinie rechts herum bis zur Strecke A B zählende Winkel leicht gefunden werden.

II. Methode der kleinsten Quadrate.

§ 4.

Princip.

Bei wiederholter Messung einer und derselben Grösse werden wir infolge der unvermeidlichen, in der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente begründeten kleinen Messungsfehler, lauter um ein Geringes von einander abweichende Resultate erzielen, und es entsteht uns nun die Aufgabe, aus allen diesen verschiedenen Resultaten denjenigen Werth zu finden, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, dass er dem wahren Werthe der gemessenen Grösse am nächsten komme.

Wir sind gewöhnt, und es entspricht dies einem gewissen praktischen Gefühle, das arithmetische Mittel aus allen direkten Beobachtungen als einen, dem wahren Werthe der gemessenen Grösse sehr nahe kommenden Werth anzusehen. Das arithmetische Mittel hat nun folgende sehr merkwürdige Eigenschaft:

Bezeichnen wir die durch Messung gewonnenen Grössen mit $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Grösse mit x, die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, um zum Werthe x zu gelangen, mit $v_1\ v_2 \ldots v_n$, so dass also

$$x - l_1 = v_1$$
$$x - l_2 = v_2$$
etc.

und setzen wir das arithmetische Mittel $\frac{l_1 + l_2 + . + l_n}{n} = M$, so wird die Summe der Quadrate der Verbesserungen für $x = M$ ein Minimum, also

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \text{minimum},$$

oder nach üblicher Schreibweise:

$$[v\,v] = \text{minim.}$$

Differentiiren wir nämlich die Gleichung

$$[v\,v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots (x - l_n)^2$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,x} = 2\,(x - l_1) + 2\,(x - l_2) + \ldots + 2\,(x - l_n)$$

$$= 2\,n\,x - 2\,(l_1 + l_2 + \ldots + l_n).$$

Setzen wir gemäss Theil I. § 35. diesen Differentialquotienten $= 0$, also

$$0 = 2\,n\,x - 2\,(l_1 + l_2 + \ldots + l_n)$$

so erhalten wir denjenigen Werth für x, welcher die Funktion $[v\,v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots (x - l_n)^2$ zum Minimum macht, nämlich

$$\mathbf{x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = M.} \tag{61}$$

Da wir nun gewöhnt sind, das arithmetische Mittel als wahrscheinlichsten Werth anzusehen, so ist hieraus der Satz hervorgegangen, dass man allgemein denjenigen Werth als den wahrscheinlichsten anzusehen hat, welcher die Summe der Quadrate der Verbesserungen zum Minimum macht.

Die Verbesserungen sind nach Obigen

$$\left.\begin{array}{c} v_1 = M - l_1 \\ v_2 = M - l_2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{62}$$

welche Gleichungen Fehlergleichungen heissen. Ihre Summe giebt:

$$[v] = n\,M - [l]$$

oder nach (61):

$$\mathbf{[v] = n\,\frac{[l]}{n} - [l] = 0.} \tag{63}$$

D. h. die Summe der Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen ist $= 0$. In dieser Gleichung ist eine Probe für die Bildung des arithmetischen Mittels gegeben.

§ 5.

Die mittleren Fehler.*)

Denkt man sich statt der n wirklich ausgeführten Beobachtungen n andere, welche sämmtlich unter sich gleich sind und einen solchen Werth haben, dass die Summe der Quadrate ihrer n gleichen Fehler a der Quadratsumme der Fehler v der wirklichen Beobachtungen gleich ist, so ist

$$[a\,a] = [v\,v]$$

oder

$$n\,a^2 = [v\,v]$$

also

$$a = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}. \tag{64}$$

*) Wilski, Einführung in die Katasteranw. IX.

Diese Grösse heisst die mittlere Abweichung der Beobachtungen vom arithmetischen Mittel. Sie ist der Quadratwurzel der Zahl n der Beobachtungen indirekt proportional.

Da das arithmetische Mittel noch nicht den **wahren** Werth der gesuchten Grösse repräsentirt, so ist die mittlere Abweichung vom Mittel auch noch nicht der mittlere Fehler der Beobachtungen. Dieser ist vielmehr

$$m = \sqrt{\frac{[w\,w]}{n}} \tag{65}$$

wenn man mit $w_1\ w_2 \ldots w_n$ die Verbesserungen bezeichnet, welche den Beobachtungen $l_1\ l_2 \ldots l_n$ zugelegt werden müssten, um den **wahren** Werth X der gesuchten Grösse zu erhalten. In dieser Gleichung bleibt uns freilich $[w\,w]$ unbekannt, weil wir X nicht kennen, doch können wir wenigstens einen Näherungswerth für $[w\,w]$ ermitteln.

Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} X - l_1 &= w_1 \\ X - l_2 &= w_2 \\ \cdot\ \ &\ \ \cdot \\ \cdot\ \ &\ \ \cdot \\ \hline n\,X - [l] &= [w] \end{aligned}$$

also
$$X - \frac{[l]}{n} = \frac{[w]}{n}$$

oder nach (61)
$$X - M = \frac{[w]}{n}$$

oder wenn wir $X - M = \mu$ setzen, worin μ den Fehler des arithmetischen Mittels bezeichnet:

$$\mu = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{n}$$

$$\mu^2 = \frac{[w\,w]}{n^2} + 2\,\frac{(w_1\,w_2 + w_2\,w_3 + \ldots + w_{n-1}\,w_n)}{n^2}.$$

Da nun die gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Fehler w gleiche Wahrscheinlichkeit für sich haben, so sind die Produkte in der Klammer des zweiten Gliedes rechts mit derselben Wahrscheinlichkeit als positiv, wie als negativ anzusehen, ihre wahrscheinlichste Summe ist also $= 0$ zu setzen, woraus wir erhalten:

$$\mu^2 = \frac{[w\,w]}{n^2}. \tag{66}$$

Da nun
$$\begin{aligned} X - l &= w \\ M - l &= v \end{aligned}$$

so ist
$$X - M = w - v$$

oder
$$\begin{aligned} \mu &= w - v \\ w &= \mu + v \end{aligned}$$

oder einzeln:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu + v_1 \quad \text{und} \quad w_1^2 = \mu^2 + 2\,v_1\,\mu + v_1^2 \\ w_2 &= \mu + v_2 \quad\ ,, \quad\ \ w_2^2 = \mu^2 + 2\,v_2\,\mu + v_2^2 \\ &\ \ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \hline \text{Summe}\ \ [w\,w] &= n\,\mu^2 + 2\,\mu\,[v] + [v\,v] \end{aligned}$$

oder da $[v] = 0$:

$$[w\,w] = [v\,v] + n\,\mu^2 \tag{67}$$

oder da nach (66) $n^2 \mu^2 = [w\,v]$, also $n\,\mu^2 = \frac{[w\,v]}{n}$:

$$[w\,w] = [v\,v] + \frac{[w\,w]}{n}$$

woraus folgt:

$$[w\,w] = \frac{n\,[v\,v]}{n-1} \tag{68}$$

daher nach (65)

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{[\mathbf{v\,v}]}{\mathbf{n-1}}} \tag{69}$$

d. h. wir finden den mittleren Fehler der Beobachtungen, indem wir die Quadratsumme der Verbesserungen durch die Anzahl der **überschüssigen** Beobachtungen dividiren und die Quadratwurzel ziehen, (denn da zu einer einmaligen Bestimmung der Grösse x **eine** Beobachtung genügt, so sind von den n vorhandenen Beobachtungen n — 1 Beobachtungen überschüssige.

Den Fehler μ des arithmetischen Mittels finden wir aus (66) und (68)

$$\mu^2 = \frac{n\,[v\,v]}{n^2\,(n-1)} = \frac{[v\,v]}{n\,(n-1)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(n-1)}} \tag{70}$$

oder nach (69) $\quad \mu = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$. (70a)

D. h. wenn wir bei n Beobachtungen in jeder einzelnen Beobachtung einen mittleren Fehler m zu befürchten haben, so haben wir im arithmetischen Mittel dieser n Beobachtungen den Fehler $\frac{m}{\sqrt{n}}$ zu befürchten. Der Fehler des arithmetischen Mittels ist also der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional.

§ 6.

Mittlerer Fehler zusammengesetzter Grössen.

Besteht ein Ganzes aus n Theilen, deren mittlere Fehler $= m_1, m_2 \ldots m_n$ seien, so ist der mittlere Fehler des Ganzen:

$$m = \pm m_1 + (\pm m_2) + (\pm m_3) \ldots + (\pm m_n)\,.$$

worin die Werthe m theils positiv, theils negativ sind, und wenn wir diese Gleichung quadriren, mit Rücksicht auf beide gleich wahrscheinlichen Vorzeichen, vergl. die Bemerkung vor Gl. (66):

1) $m^2 = m_1{}^2 + m_2{}^2 + \ldots + m_n{}^2$

2) $m = \sqrt{[m\,m]}$

Für $m_1 = m_2 = m_3 \ldots$ geht 1) über in:

$$m^2 = n\,m^2$$

also

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}\sqrt{\mathbf{n}} \tag{71}$$

d. h. der mittlere Fehler der ganzen Grösse ist der Quadratwurzel aus der Anzahl der Theile proportional.

Beispielsweise ist der mittlere Fehler einer gemessenen Länge proportional der Quadratwurzel der in derselben enthaltenen Kettenlängen, d. h. proportional der Quadratwurzel ihrer Länge. Ist also m der mittlere Fehler der Längeneinheit, so ist der mittlere Fehler der Länge s:

$$m = m\sqrt{s}.$$

Enthält aber die Längenmessung ausser den zufälligen Fehlern noch einen **constanten** Fehler, so ist dieser der Länge s proportional. Ist m′ der constante Fehler der Längeneinheit, so ist der der ganzen Länge $= m' s$.

Ist m der mittlere Fehler der einzelnen Winkel eines Polygons, so ist $m\sqrt{n}$ der Fehlbetrag der Winkelsumme gegen die theoretische Winkelsumme $2n - 4$ R., oder zeigt umgekehrt die Summe der gemessenen Winkel eines Polygons gegen das Soll den Widerspruch w, so ist $\frac{w}{\sqrt{n}}$ der mittlere Fehler der Beobachtungen.

§ 7.

Gewichte der Beobachtungen. Allgemeines arithmetisches Mittel.

Je genauer eine Beobachtung ist, um so geringer wird ihr mittlerer Fehler sein. Die Genauigkeit ist dem mittleren Fehler umgekehrt proportional. Demnach verhält sich z. B. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus n Beobachtungen umgekehrt wie der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, also nach (70a) direkt wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen. Ist demnach einer Beobachtung der mittlere Fehler m beizulegen, so werden 4, 9, 16 Beobachtungen erforderlich sein, wenn man den mittleren Fehler des Mittels auf $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m herabdrücken will. Weiss man beispielsweise aus Erfahrung, dass man von einem Theodolit einen mittleren Fehler von 30″ zu erwarten hat, so wird man mit diesem Instrumente einen Winkel 4 mal, 9 mal etc. messen müssen, wenn man denselben 15″, 10″ etc. genau erhalten will. Oder hat man zwei Instrumente, von denen eines eine n mal so genaue Beobachtung gestattet, als das andere, so wird man mit letzterem n^2 Beobachtungen ausführen müssen, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, welche das bessere Instrument mit einer einzigen Beobachtung erzielt. Hätte man mit beiden Instrumenten nur **eine** Beobachtung ausgeführt, so würde man der mit dem besseren Instrumente ausgeführten Beobachtung ein n^2 faches Gewicht, gegenüber der mit dem anderen Instrumente ausgeführten Beobachtung beizumessen haben. Die den einzelnen Beobachtungen beizulegenden Gewichte verhalten sich also wie die Quadrate der Genauigkeiten, oder umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler. Bezeichnen wir die Gewichte zweier Beobachtungen, denen die mittleren Fehler m_1 und m_2 beizumessen sind, mit p_1 und p_2, so ist also

$$\left.\begin{aligned} p_1 : p_2 &= \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} \\ \text{oder} \qquad m_1 : m_2 &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Hätten wir zwei Beobachtungen mit den Gewichten p_1 und p_2 und sollten wir den wahrscheinlichsten Werth der beobachteten Grösse ermitteln, so werden wir statt der einen Beobachtung mit dem Gewichte p_1 setzen können p_1 Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Statt der Beobachtung mit dem Gewichte p_2 können wir setzen p_2 Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Wir erhalten somit $p_1 + p_2$ Beobachtungen von gleichem Gewichte, und werden nun das arithmetische Mittel aus denselben als wahrscheinlichsten Werth anzusehen haben. Seien die Beobachtungen mit den Gewichten $p_1\, p_2 \ldots p_n = l_1\, l_2 \ldots l_n$, so erhalten wir als wahrscheinlichsten Werth

$$x = \frac{l_1 + l_1 + \ldots (p_1 \text{ mal}) + l_2 + l_2 + \ldots (p_2 \text{ mal}) + \ldots}{p_1 + p_2 + \ldots}$$

oder
$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{p_1\, l_1 + p_2\, l_2 + \ldots + l_n}}{\mathbf{p_1 + p_2 + \ldots p_n}}. \tag{73}$$

Wir finden also das arithmetische Mittel aus mehreren Beobachtungen von verschiedenem Gewichte, — **allgemeines arithmetisches Mittel** —, wenn wir jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multipliciren und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Gewichte dividiren. Analog der Gl. (63) erhalten wir als Rechenprobe:

$$[p\, v] = 0. \tag{73a}$$

§ 8.

Die drei Hauptaufgaben der Ausgleichungsrechnung.

1) **Ausgleichung direkter Beobachtungen.** Eine Grösse ist direkt wiederholt gemessen.

2) **Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.** Es sind die wahrscheinlichsten Werthe mehrerer von einander unabhängiger Grössen zu ermitteln, welche nicht direkt gemessen worden sind, an deren Stelle aber mehrere andere Grössen beobachtet sind, aus denen die gesuchten Grössen sich ableiten lassen, welche also Funktionen der Unbekannten sind.

3) **Ausgleichung bedingter Beobachtungen.** Die unmittelbar beobachteten Grössen müssen gewissen Bedingungen genügen, z. B. die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks muss 180° betragen.

Die Ausgleichung direkter Beobachtungen ist im § 5 behandelt. Wir haben gesehen, dass das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Grösse liefert, was uns zu den Fehlergleichungen

$$v_1 = M - l_1$$
$$v_2 = M - l_2$$
$$\text{etc.}$$

führte. Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen wurde $m = \sqrt{\frac{[v\, v]}{n-1}}$ gefunden. Analog wird der mittlere Fehler, wenn den Beobachtungen verschiedene Gewichte beizumessen sind

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{\mathbf{p\,[v\, v]}}{\mathbf{[p]-1}}} \tag{74}$$

erhalten. — Vergl. § 7.

Um den mittleren Fehler eines Theodolit zu bestimmen, beobachtet man einen Winkel wiederholt, bildet das arithmetische Mittel, sodann die Verbesserungen v und findet den mittleren Fehler des Instruments nach der Formel $m = \sqrt{\frac{[v\, v]}{n-1}}$.

§ 9.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Nehmen wir an, es seien die Coordinaten x und y eines Punktes P, — Fig. 26 — zu ermitteln. Die Punkte P_1, P_2, P_3 . . . seien durch ihre Coordinaten gegeben, so können wir die Coordinaten des Punktes P durch vermittelnde Beobachtungen verschiedener Art bestimmen, z. B. indem wir die Neigungen α_1 α_2 α_3 . . . der Strahlen $P_1 P$, $P_2 P$ . . . gegen die Abscissenaxe (Meridian) beobachten, oder indem wir die Strecken s_1 s_2 s_3 . . . . messen und dergl. mehr. Nehmen wir an, wir hätten die Strecken s gemessen, so würden zwei Strecken zur Bestimmung des Punktes P genügen. Alle übrigen gemessenen Strecken sind überschüssige Beobachtungen. Durch die Messung blos **zweier** Strecken würde nur eine einmalige Bestimmung des Punktes möglich sein. Die bei der Beobachtung begangenen Fehler können nicht zu Tage treten. Wir erkennen dieselben aber sofort, wenn noch eine oder mehrere Strecken zu Gebote stehen. Gesetzt, wir hätten aus den Strecken s_1 und s_2 die Coordinaten des Punktes P berechnet, so können wir aus den so gewonnenen Coordinaten, die wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen wollen, und aus den bekannten Coordinaten der Punkte P_3, P_4 . . . die Strecken s_3, s_4 . . . mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes ableiten. Die Differenzen der so erhaltenen Streckenlängen gegen die durch direkte Messung gefundenen Längen s geben uns Aufschluss über die begangenen Fehler. Es wird nun darauf ankommen, den Punkt P durch Aenderung seiner vorläufigen Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ so zu verschieben, dass, wenn die aus den so erhaltenen **endgültigen** Coordinaten abgeleiteten Strecken s mit den beobachteten Strecken verglichen werden, die Summe der Quadrate der sich ergebenden Unterschiede, (d. h. der an den gemessenen Strecken durch diese Aenderung der Coordinaten angebrachten Verbesserungen), ein Minimum werde.

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass zu einer **einmaligen** Bestimmung des Punktes P nicht immer grade **zwei** Elemente, wie hier zwei Strecken s oder zwei Neigungen α, erforderlich sind. Wir werden z. B. später sehen, dass wenn dieser Punkt durch blosse Winkelmessung auf demselben bestimmt werden soll, zu einer einmaligen Bestimmung 3 Richtungen von P aus nach gegebenen Punkten hin zu messen sind.

2) Wir bezeichnen nun allgemein die ausgeführten Beobachtungen mit l_1, l_2 l_3 . . . l_n, wählen aus denselben so viele Beobachtungen aus, als zu einer einmaligen Bestimmmung der gesuchten Grössen y und x erforderlich sind, und berechnen aus diesen die genäherten Werthe $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$. Wir sind nunmehr im Stande, mit Hülfe der genäherten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ umgekehrt die beobachteten Grössen herzuleiten, und bezeichnen die durch diese Rechnungen gefundenen Werthe correspondierend mit λ_1, λ_2 λ_3 . . . λ_n. Alsdann ergeben sich die Widersprüche:

$$\lambda_1 - l_1 = f_1$$
$$\lambda_2 - l_2 = f_2$$
etc.

oder allgemein:
$$\lambda - l = f. \qquad (75)$$

Aendern wir nun die zur Berechnung der Grössen λ benutzten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ um die kleinen Beträge δy und δx, so werden sich auch die Grössen λ, welche Funktionen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ sind, $(\lambda = f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}))$, um kleine Beträge $\delta \lambda$ ändern, und wir sind im Stande, mit Hülfe der Differentialrechnung die Aenderungen $\delta \lambda$

durch die Aenderungen δy und δx auszudrücken. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\lambda = f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ nach $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ mit a und b, so ist nach (29)

$$\delta \lambda = a\,\delta x + b\,\delta y. \tag{76}$$

Hierin verstehen wir unter δx und δy die uns noch unbekannten Verbesserungen, welche wir den genäherten Werthen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beizulegen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe x und y der gesuchten Grössen zu erhalten. Die Grössen λ werden durch diese Verbesserungen übergehen in $\lambda + \delta\lambda$. Vergleichen wir diese endgültigen Werthe $\lambda + \delta\lambda$ mit den durch Beobachtung ermittelten Werthen l, so werden die bei der Beobachtung begangenen Fehler v erscheinen, oder richtiger die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, wenn die mit Hülfe dieser verbesserten Beobachtungen berechneten Grössen x und y ihren wahrscheinlichsten Werth erhalten sollen. Man findet:

$$v = \lambda + \delta\lambda - l$$

oder nach (76) $\quad v = a\,\delta x + b\,\delta y + f$

oder einzeln:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + f_1 \\ v_2 &= a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + f_2 \\ &\;\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\;\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\;\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= a_n\,\delta x + b_n\,\delta y + f_n \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Es kommt nun darauf an, in diesen **Fehlergleichungen** die noch unbekannten Coordinatenverbesserungen δy und δx so zu bestimmen, dass

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = [v\,v] = \text{minimum}. \tag{78}$$

Wir werden zu dem Ende die Gleichungen (77) quadriren und erhalten n Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$v^2 = a^2\,\delta x^2 + 2\,a\,b\,\delta x\,\delta y + 2\,a\,f\,\delta x + b^2\,\delta y^2 + 2\,b\,f\,\delta y + f^2$$

und durch Summirung dieser n Gleichungen:

$$[v\,v] = [a\,a]\,\delta x^2 + 2\,[a\,b]\,\delta x\,\delta y + 2\,[a\,f]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y^2 + 2\,[b\,f]\,\delta y + [f\,f].$$

Soll nun $[v\,v]$ ein Minimum werden, so haben wir diese Gleichung partiell nach δx und δy zu differentiiren und die partiellen Differentialquotienten $\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta x)}$ und $\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta y)} = 0$ zu setzen und aus den so erhaltenen Gleichungen δx und δy zu entwickeln. Die Differentiation nach δx ergiebt:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta x)} = [a\,a]\,\delta x + 2\,[a\,b]\,\delta x + 2\,[a\,f]$$

und die Differentiation nach δy:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta y)} = 2\,[a\,b]\,\delta x + 2\,[b\,b]\,\delta y + 2\,[b\,f].$$

Setzen wir diese Differentialquotienten $= 0$, so ergeben sich die **Normalgleichungen:**

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,\delta x + [a\,b]\,\delta y + [a\,f] &= 0 \\ [a\,b]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y + [b\,f] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

3) **Die Auflösung der Normalgleichungen** nach den Unbekannten δy und δx erfolgt in der preussischen Vermessungsanweisung nach folgender Schablone: Dieselben erhalten zunächst durch Einführung kürzerer Zeichen die Form:

$$\text{I} \quad 0 = a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + f_1$$
$$\text{II} \quad 0 = b_1\,\delta x + b_2\,\delta y + f_2$$

Aus I erhalten wir durch Multiplication mit $\frac{b_1}{a_1}$

$$\text{III} \quad 0 = b_1 \delta x + \frac{b_1}{a_1} b_1 \delta y + \frac{b_1}{a_1} f_1$$

und wenn wir III von II abziehen:

$$0 = \delta y \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 \right) + f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1.$$

Setzt man den Klammerausdruck $= \mathfrak{b}_2$, die Summe des zweiten und dritten Gliedes $= \mathfrak{f}_2$, so erhält man

$$\text{IV} \quad 0 = \mathfrak{b}_2 \delta y + \mathfrak{f}_2$$

$$\delta y = -\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2}. \tag{80}$$

Durch Einsetzung des Werthes für δy in I wird erhalten:

$$\delta x = -\frac{f_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \delta y. \tag{81}$$

Rechenprobe: Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen kann man sich wie folgt verschaffen: Multiplicirt man (81) mit f_1, addirt beiderseits $f_2 \delta y$, so erhält man:

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \delta y + f_2 \delta y$$

oder nach (80)

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left(\frac{b_1}{a_1} f_1 - f_2 \right) \left(-\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \right)$$

$$= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left(f_2 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \right) \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2}$$

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2.$$

Man erhält also eine Probe, wenn man

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= f_1 \delta x + f_2 \delta y \quad \text{und} \\ \Sigma &= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2 \end{aligned} \right\} \tag{82}$$

aus jeder dieser beiden Gleichungen berechnet und die beiden Resultate vergleicht.

Eine Probe für die richtige Bildung der Werthe a_1, b_1, f_1, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ erhält man wie folgt: Man berechnet die Verbesserungen v nach den Gleichungen (77), quadrirt die einzelnen v und die Fehler f, dann muss zunächst die Summe der Fehlerquadrate $[f f]$ grösser sein, als die zum Minimum gewordene Summe $[v v]$. Eine schärfere Probe geht aber noch aus Folgendem hervor: Es ist:

$$[v v] = [(a \delta x + b \delta y + f)^2]$$

$$= [a a] \delta x^2 + 2 [a b] \delta x \delta y + [b b] \delta y \delta y + 2 [a f] \delta x + 2 [b f] \delta y + [f f]$$

$$[v v] = ([a a] \delta x + [a b] \delta y + [a f]) \delta x + ([a b] \delta x + [b b] \delta y + [b f]) \delta y + [a f] \delta x + [b f] \delta y + [f f]$$

die beiden Klammerausdrücke sind nach (79) $= 0$, also ist:

$$[v v] - [f f] = [a f] \delta x + [b f] \delta y$$

$$= f_1 \delta x + f_2 \delta y$$

oder nach (82)

$$[v v] - [f f] = \Sigma. \tag{83}$$

4) **Auflösung der Normalgleichungen mit vier Unbekannten:** Hätten wir 4 Normalgleichungen mit vier Unbekannten (vergl. § 26), von der Form:

$$0 = [a\,a]\,\delta x_a + [a\,b]\,\delta y_a + [a\,c]\,\delta x_b + [a\,d]\,\delta y_b + [a\,f]$$
$$0 = [a\,b]\,\delta x_a + [b\,b]\,\delta y_a + [b\,c]\,\delta x_b + [b\,d]\,\delta y_b + [b\,f]$$
$$0 = [a\,c]\,\delta x_a + [b\,c]\,\delta y_a + [c\,c]\,\delta x_b + [c\,d]\,\delta y_b + [c\,f]$$
$$0 = [a\,d]\,\delta x_a + [b\,d]\,\delta y_a + [c\,d]\,\delta x_b + [d\,d]\,\delta y_b + [d\,f]$$

so schreiben wir dieselben zunächst unter einfacherer Bezeichnung der Faktoren:

$$\text{I}\quad 0 = a_1\,\delta x_a + b_1\,\delta y_a + c_1\,\delta x_b + d_1\,\delta y_b + f_1$$
$$\text{II}\quad 0 = b_1\,\delta x_a + b_2\,\delta y_a + c_2\,\delta x_b + d_2\,\delta y_b + f_2$$
$$\text{III}\quad 0 = c_1\,\delta x_a + c_2\,\delta y_a + c_3\,\delta x_b + d_3\,\delta y_b + f_3$$
$$\text{IV}\quad 0 = d_1\,\delta x_a + d_2\,\delta y_a + d_3\,\delta x_b + d_4\,\delta y_b + f_4$$

Multipliciren wir I der Reihe nach mit $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{d_1}{a_1}$ und ziehen die so erhaltenen 3 Gleichungen der Reihe nach von den Gleichungen II, III, IV ab, so erhalten wir 3 neue Gleichungen mit nur 3 Unbekannten:

$$1)\quad 0 = \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta x_b + \left(d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1\right) \delta y_b + \left(f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1\right)$$

oder unter einfacherer Bezeichnung der Klammergrössen:

$$\text{V}\quad 0 = \mathfrak{b}_2\,\delta y_a + \mathfrak{c}_2\,\delta x_b + \mathfrak{d}_2\,\delta y_b + \mathfrak{f}_2$$

$$2)\quad 0 = \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

Hierin ist die erste Klammergrösse = dem früheren $\mathfrak{c}_2$, also

$$\text{VI}\quad \mathfrak{c}_2\,\delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

$$3)\quad 0 = \left(d_2 - \frac{b_1}{a_1} d_1\right) \delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right)$$

worin die erste Klammergrösse = $\mathfrak{d}_2$ ist, also:

$$\text{VII}\quad 0 = \mathfrak{d}_2\,\delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right).$$

Multipliziren wir die erste der drei neuen Gleichungen, (V), der Reihe nach mit $\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2}$ und $\frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2}$ und ziehen die Resultate von den beiden anderen Gleichungen VI und VII ab, so erhalten wir zwei neue Gleichungen, welche nur noch die Unbekannten δx_b und δy_b enthalten:

$$1)\quad 0 = \left(c_1 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} b_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right)$$

oder wenn wir einfache Zeichen für die Klammergrössen einführen:

$$\text{VIII}\quad 0 = \mathfrak{c}_3\,\delta x_b + \mathfrak{d}_3\,\delta y_b + \mathfrak{f}_3\,.$$

$$2)\quad 0 = \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right)$$

worin die erste Klammergrösse gleich dem früheren $\mathfrak{d}_3$ ist, also

$$\text{IX}\quad 0 = \mathfrak{d}_3\,d x_b + \left(d_1 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right)$$

Multipliciren wir weiter VIII mit $\frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3}$ und ziehen das Resultat von IX ab, so ergiebt sich:

$$0 = \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3\right)$$

oder unter Einführung einfacherer Zeichen für die Klammergrössen:

$$\text{X} \quad 0 = \mathfrak{d}_4 \, \delta y_b + \mathfrak{f}_4.$$

Nunmehr ergeben sich die Unbekannten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\delta y_b &= -\frac{\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{d}_4} \quad \text{(aus X)} \\
\delta x_b &= -\frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \delta y_b \quad \text{(aus VIII)} \\
\delta y_a &= -\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \delta y_b - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \delta x_b \quad \text{(aus V)} \\
\delta x_a &= -\frac{f_1}{a_1} - \frac{d_1}{a_1} \delta y_b - \frac{c_1}{a_1} \delta x_b - \frac{b_1}{a_1} \delta y_a \quad \text{(aus I).}
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Um das Gesetz des Coofficientenbaues deutlicher vor Augen zu führen, stellen wir die Coofficienten hier nochmals zusammen, und glauben, dass es danach leicht sein wird, auch bei noch mehreren Unbekannten die weiteren Coofficienten ohne Weiteres anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}
& b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{b}_2 \\
& c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{c}_2 \\
& d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{d}_2 \\
& f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{f}_2 \\
& c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_3 \\
& d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}_3 \\
& f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{f}_3 \\
& d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_4 \\
& f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{f}_4
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen giebt die den Gleichungen (82) analoge Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= -\frac{f_1}{a} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{f}_3 - \frac{\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{d}_4} \mathfrak{f}_4 \\
\Sigma &= f_1 \, \delta x_a + f_2 \, \delta y_a + f_3 \, \delta x_b + f_4 \, \delta y_b
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

5) **Mittlerer Fehler.** Derselbe ist analog (69) zu bilden. Ist q die Anzahl der Beobachtungen, welche zu einer **einmaligen** Bestimmung der gesuchten Grössen erforderlich ist, so sind n — q Beobachtungen **überschüssige.** Der mittlere Fehler wird also sein:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-q}}. \tag{87}$$

b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

Sind den einzelnen Beobachtungen verschiedene Gewichte beizulegen, so sind die Quadrate und Produkte der Coefficienten der Normalgleichungen mit den ihnen zukommenden Gewichten p zu multipliciren. Die Normalgleichungen für 2 Unbekannte werden also z. B. lauten:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [p\,a\,a]\,\delta x + [p\,a\,b]\,\delta y + [p\,a\,f] \\ 0 &= [p\,a\,b]\,\delta x + [p\,b\,b]\,\delta y + [p\,b\,f] \end{aligned}\right\} \tag{88a}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergiebt sich aus der Gleichung

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-q}}. \tag{88b}$$

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen sind dann nach (72):

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}},\; m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \text{ etc.} \tag{88c}$$

§ 10.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Die Beobachtungen haben gewissen Bedingungen zu genügen, z. B. im Dreiecksnetz Fig. 27 folgenden:

1) $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 180^0$
2) $\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6 = 180^0$
3) $\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_9 = 180^0$
4) $\gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_9 = 360^0$

Zu diesen ohne Weiteres verständlichen Bedingungen kommt noch eine 5. Bedingung. Bezeichnen wir nämlich die drei innerhalb des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten mit a, b, c, so ist nach dem Sinussatze:

$$a = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\,.\,b$$

$$b = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_5}\,.\,c$$

$$c = \frac{\sin\alpha_7}{\sin\beta_8}\,.\,a$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin\alpha_1 \ \sin\alpha_4 \ \sin\alpha_7}{\sin\beta_2 \ \sin\beta_5 \ \sin\beta_8} = 1 \tag{89}$$

oder

5) $\log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_4 + \log\sin\alpha_5 - \log\sin\beta_2 - \log\sin\beta_5 - \log\sin\beta_8 = 0.$ (89a)

Wäre die Bedingung 5) nicht erfüllt, und berechnete man, von der als bekannt vorausgesetzten Dreiecksseite a ausgehend, nach und nach die Dreiecke I, II, III, so würde die aus dem Dreiecke III berechnete Länge für a nicht mit der der Rechnung zu Grunde gelegten Dreiecksseite a übereinstimmen, wenn auch die Bedingungen 1)—4) erfüllt sind.

Infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden diese Bedingungen nicht ohne Weiteres genau erfüllt sein, sondern es werden sich kleine Widersprüche $w_1, w_2, w_3, w_4\ w_5$ ergeben, und es entsteht die Aufgabe, die Winkel durch beigelegte Verbesserungen $v_1, v_2 \ldots v_9$ so zu ändern, dass die Widersprüche beseitigt werden, während gleichzeitig die Summe der Quadrate dieser Verbesserungen ein Minimum werden, d. h. den kleinsten Werth erhalten soll, welchen die 5 Bedingungen zulassen.

Setzen wir in Gl. 5) die Differentialquotienten $\frac{d \log \sin \alpha_1}{d\, \alpha_1}, \frac{d \log \sin \alpha_4}{d\, \alpha_4}$ etc. $= a_1, a_4$ etc., so werden sich die Logarithmen der Sinus, — bei Aenderung der Winkel um die kleinen Beträge v_1, v_4 etc. um die Beträge $a_1 v_1, a_4 v_4$ etc. ändern. In den Gleichungen 1)—4) sind die Differentialquotienten $\frac{d\,\alpha}{d\,\alpha}, \frac{d\,\beta}{d\,\beta}$ etc. sämmtlich $= 1$, demnach die Aenderungen der Winkel, wie sich ja auch von selbst versteht, $= 1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2$ etc. Durch die Aenderungen v sollen nun die Widersprüche aufgehoben werden, es entstehen also aus den Gleichungen 1)—5) die Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + w_1 = 0 \\ \text{II} & 1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 + w_2 = 0 \\ \text{III} & 1 \cdot v_7 + 1 \cdot v_8 + 1 \cdot v_9 + w_3 = 0 \\ \text{IV} & 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_6 + 1 \cdot v_9 + w_4 = 0 \\ \text{V} & a_1 v_1 + a_4 v_4 + a_7 v_7 - a_2 v_2 - a_5 v_5 - a_8 v_8 + w_5 = 0. \end{array}$$

Hierzu kommt als 6. Bedingung

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_9^2 = \text{minim.}$$

welche erfordert, dass

$$v_1\, d\, v_1 + v_2\, d\, v_2 + \ldots + v_9\, d\, v_9 = 0.$$

2) In grösserer Allgemeinheit werden diese Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \mathbf{a}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_1 \\ 0 = \mathbf{b}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{b}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_2 \\ 0 = \mathbf{c}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{c}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_3 \end{array}\right\} \tag{90}$$

etc. etc.

worin die Differentialquotienten a, b, c $= 0$ zu setzen sind, wenn das zugehörige v fehlt. (So fehlen beispielsweise in Gl. I $v_4, v_5 \ldots v_9$, in Gl. IV $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$, in Gl. V $v_3, v_6\ v_9$.) — Ferner erfordert die Minimumsbedingung:

$$v_1\, d\, v_1 + v_2\, d\, v_2 + \ldots + v_n\, d\, v_n = 0. \tag{91}$$

Durch Differentiation der Gleichung (90) wird erhalten:

$$\begin{array}{l} 0 = a_1\, d\, v_1 + a_2\, d\, v_2 + \ldots + a_n\, d\, v_n \\ 0 = b_1\, d\, v_1 + b_2\, d v_2 + \ldots + b_n\, d\, v_n \end{array}$$

etc. etc.

Multipliciren wir diese Gleichungen, deren Anzahl gleich b sei (Anzahl der Bedingungen), der Reihe nach mit b noch näher zu bestimmenden Coefficienten $k_1, k_2, k_3, \ldots k_b$ und addiren sie, so erhalten wir:

$$0 = (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots)\, d\, v_1 + (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots)\, d\, v_2 + \ldots,$$

welche Gleichung nach ihrem Bau mit (91) übereinstimmt.

Dieser Gleichung (91) wird also genügt werden, wenn wir in derselben die einzelnen v den correspondierenden Klammergrössen der letzten Gleichung gleichsetzen, also:

4*

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots \\ v_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{91a}$$

welche Gleichungen **Correlatengleichungen** heissen. Setzt man diese Werthe von v in die Bedingungsgleichungen (90) ein, so ergeben sich b **Normalgleichungen**, aus welchen die Correlaten k gefunden werden können:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + \ldots + w_1 &= 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + \ldots + w_2 &= 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + \ldots + w_3 &= 0 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Hat man hieraus die Correlaten k nach § 9, (84) und (85), ermittelt, so können die Verbesserungen v nach den Gleichungen (91a) berechnet werden.

3) **Mittlerer Fehler:** Vermittelst der b Bedingungsgleichungen lassen sich stets b Beobachtungen l durch die n — b übrigen ausdrücken. Hat man z. B. $n = 4$, $b = 2$, so kann man die zwei Bedingungsgleichungen wie folgt schreiben:

$$- w_1 - a_3 l_3 - a_4 l_4 = a_1 l_1 + a_2 l_2$$
$$- w_2 - b_3 l_3 - b_4 l_4 = b_1 l_1 + b_2 l_2$$

Diese Gleichungen lassen sich nach l_1 und l_2 auflösen. Letztere Beobachtungen sind also bekannt, sobald l_3 und l_4 gegeben sind. Die Beobachtungen l_3 und l_4 sind somit **vermittelnde** Beobachtungen für l_1 und l_2. Da letztere auch **direkt** beobachtet sind, so haben wir für l_1 und l_2 vier Bestimmungen, wovon zwei als überschüssige anzusehen sind. Allgemein ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen und umgekehrt. Ist die Zahl der Bedingungen gleich b, so wird also der mittlere Fehler der Beobachtungen sein:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{b}}. \tag{93}$$

Beispiel. Im Falle der Figur 27 lauten die Fehlergleichungen wie folgt, wozu bemerkt wird, dass die oberen Gleichungen die allgemeine Form, die unteren die für unseren besonderen Fall geltende Form der Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned}
1)\;& a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_8 v_8 + a_9 v_9 + w_1 = 0 \\
& 1\, v_1 + 1\, v_2 + 1\, v_3 \qquad + w_1 = 0 \\
2)\;& b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + b_7 v_7 + b_8 v_8 + b_9 v_9 + w_2 = 0 \\
& 1\, v_4 + 1\, v_5 + 1\, v_6 \qquad + w_2 = 0 \\
3)\;& c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_5 v_5 + c_6 v_6 + c_7 v_7 + c_8 v_8 + c_9 v_9 + w_3 = 0 \\
& 1\, v_7 + 1\, v_8 + 1\, v_9 + w_3 = 0 \\
4)\;& d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_4 v_4 + d_5 v_5 + d_6 v_6 + d_7 v_7 + d_8 v_8 + d_9 v_9 + w_4 = 0 \\
& 1\, v_3 \qquad + 1\, v_6 \qquad + 1\, v_9 + w_4 = 0 \\
5)\;& e_1 v_1 + e_2 v_2 + e_3 v_3 + e_4 v_4 + e_5 v_5 + e_6 v_6 + e_7 v_7 + e_8 v_8 + e_9 v_9 + w_5 = 0 \\
& e_1 v_1 - e_2 v_2 \qquad + e_4 v_4 - e_5 v_5 \qquad + e_7 v_7 - e_8 v_8 \qquad + w_5 = 0
\end{aligned}$$

Es seien nun gemessen die Winkel:

	$\alpha_1 = 27^0\ 32'\ 10''$	$\alpha_4 = 35^0\ 03'\ 53''$	$\alpha_7 = 27^0\ 36'\ 45''$	$\gamma_3 = 120^0\ 54'\ 57''$
	$\beta_2 = 31\ \ 32\ \ 50$	$\beta_5 = 26\ \ 53\ \ 12$	$\beta_8 = 31\ \ 20\ \ 45$	$\gamma_6 = 118\ \ 03\ \ 00$
	$\gamma_3 = 120\ \ 54\ \ 57$	$\gamma_6 = 118\ \ 03\ \ 00$	$\gamma_9 = 121\ \ 02\ \ 07$	$\gamma_9 = 121\ \ 02\ \ 07$
Summa:	$189^0\ 59'\ 57''$	$180^0\ 00'\ 05''$	$179^0\ 59'\ 37''$	$360\ \ 00\ \ 04$
Mithin	$w_1 = -3''$	$w_2 = +5''$	$w_3 = -23''$	$w_4 = +4''$

Ehe wir zur Ermittelung des Widerspruchs w_5 schreiten, sei Folgendes bemerkt:

In Gleichung 5) bedeuten $e_1 v_1$, $e_2 v_2$ etc. die Aenderungen, welche die Logarithmen $\log \sin \alpha_1$, $\log \sin \beta_2$ etc. erleiden, wenn die Winkel α, β etc. selbst um die Beträge v_1'', v_2'' etc. geändert werden, demnach sind e_1, e_2 . . . nichts anderes, als die Aenderungen der Logarithmen der Sinus, welche einer Aenderung der Winkel um 1″ entsprechen. Diese Aenderungen finden wir aber in den Logarithmentafeln als Tafeldifferenz in den gewöhnlich mit d überschriebenen Spalten direkt angegeben, und entnehmen dieselben zugleich mit den Logarithmen der Sinus selbst. Lauter Winkel des ersten Quadranten vorausgesetzt, sind diese Coefficienten für die Winkel des Zählers in Gl. (89), also für die Winkel α, positiv, für die des Nenners, also für die Winkel β, negativ. Die Coefficienten e und der Widerspruch w_5 ermittelt sich demnach wie folgt:

		e		e
log sin α_1	9,664 931	4,0		
„ „ α_4	9,759 291	3,0		
„ „ α_7	9,666 040	4,0		
log sin β_2			9,718 669	— 3,8
„ „ β_5			9,655 357	— 4,1
„ „ β_8			9,716 172	— 2,5
Summa	9,090 262		9,090 198	
Verglichen	9,090 198			
Mithin	$w_5 = +64$			

Zur Bildung der Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. der Normalgleichungen (92) benutzen wir das folgende Schema, zu welchem bemerkt wird, dass im Fusse desselben für die daselbst ermittelten Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. gemäss § 9, 4) die einfachen Bezeichnungen a_1, b_1 etc.

Beobachtung	a	b	c	d	e	a a	a b	a c	a d	a e	b b	b c	b d	b e	c c	c d	c e	d d	d e	e e
α_1	1	0	0	0	+ 4,0	1	„	„	„	+ 4,0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	16,0
β_2	1	0	0	0	— 3,8	1	„	„	„	— 3,8	„	„	„	„	„	„	„	„	„	14,4
γ_3	1	0	0	1	0	1	„	„	1	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	„
α_4	0	1	0	0	+ 3,0	„	„	„	„	„	1	„	„	+ 3,0	„	„	„	„	„	9,0
β_5	0	1	0	0	— 4,1	„	„	„	„	„	1	„	„	— 4,1	„	„	„	„	„	16,8
γ_6	0	1	0	1	0	„	„	„	„	„	1	„	1	„	„	„	„	1	„	„
α_7	0	0	1	0	+ 4,0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	+ 4,0	„	„	16,0
β_8	0	0	1	0	— 2,5	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	— 2,5	„	„	6,2
γ_9	0	0	1	1	0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	1	„	1	„	„
	Summe [ ]					+ 3	0	0	+ 1	— 0,2	+ 3	0	+ 1	— 1,1	+ 3	+ 1	+ 1,5	+ 3	0	+ 78
						a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	b_2	c_2	d_2	e_2	c_3	d_3	e_3	d_4	e_4	e_5

eingeführt sind. Es sind nun sonach sämmtliche Coefficienten der Normalgleichungen bekannt. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Formeln (85) — in welchen hier w statt $\mathfrak{f}$ zu schreiben ist, — und demnächst durch Einsetzen der daraus ermittelten Coefficienten $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ etc. in die Formeln (84) — in welchen k_5, k_4 . . . statt δy_b, δx_b . . . zu schreiben ist, — werden die Unbekannten k gefunden und hierauf aus den Correlatengleichungen (91a) die Winkelverbesserungen v in Sekunden.

b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

1) Kommen den Beobachtungen verschiedene Gewichte zu, so ändert das an den Bedingungsgleichungen natürlich nichts, da die Bedingungen dieselben bleiben. Da aber alsdann nicht die Summe [v v], sondern [p v v] zum Minimum zu machen ist, so geht die Gleichung (91) über in

$$0 = p_1 v_1 d v_1 + p_2 v_2 d v_2 + \ldots$$

und man kommt durch analoge Entwickelung zu den Correlatengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 k_1}{p_1} + \frac{b_1 k_2}{p_2} + \frac{c_1 k_1}{p_3} + \ldots \\ v_1 &= \frac{a_2 k_1}{p_1} + \frac{b_2 k_2}{p_2} + \frac{c_2 k_3}{p_3} + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

und erhält hieraus die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] + \ldots + w_1 = 0 \\ \left[\frac{b\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] + \ldots + w_2 = 0 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

2) **Der mittlere Fehler** der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \tag{96}$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \text{ etc.} \tag{97}$$

3) Beispiel.*) Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$l_1 = 62^0\ 37'\ 24''$ und sei das Gewicht $p_1 = 16$

$l_2 = 48^0\ 47'\ 46''$ „ „ „ „ $p_2 = 25$

$l_3 = 68^0\ 34'\ 35''$ „ „ „ „ $p_3 = 36$

Sa. $179^0\ 59'\ 45''$

$w = -15''$

Die Fehlergleichung lautet: $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0$.

Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1, \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1, \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = + 15''$$

also $$k_1 = \frac{1500}{13}$$

somit $$v_1 = \frac{1500}{13 \,.\, 16} = + 7{,}2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13 \,.\, 25} = + 4{,}6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13 \,.\, 36} = + 3{,}2''$$

$$\text{Sa. } + 15'' = - w.$$

Man erkennt, dass die Verbesserungen v den Gewichten p umgekehrt proportional sind.

III. Trigonometrische Messungen.

A. Dreiecksnetz.

§ 11.

Triangulirung.**)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

**) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschritten sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39—40 Kenntniss zu nehmen.