UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 4. Princip

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Visual Library

zeit zurückgelegte Weg $= 15\,t'$, also der Bogen $A'B = 15\,t'$. Wir erhalten daher aus Formel IV:

$$d\alpha = \frac{2\,t\,d}{\cos\varphi \sin 15\,t'}.$$

Dieser Winkel ist von der nachmittäglichen Beobachtung **ganz**, oder, was dasselbe ist, vom Mittel $\frac{A + A'}{2}$ zur Hälfte in **Abzug** zu bringen. Die Correktion lautet also

$$d\alpha = \frac{t\,d}{\cos\varphi \sin 15\,t'}.$$

Die **A**enderung der Deklination pr. Zeitminute beträgt in Sekunden:

am	1. Januar	+ 0,20	am	1. Juli	— 0,15
	1. Februar	+ 0,72		1. Aug.	— 0,62
	1. März	+ 0,95		1. Sept.	— 0,93
	20. März	+ 0,99		20. Sept.	— 0,98
	1. April	+ 0,95		1. Okt.	— 0,97
	1. Mai	+ 0,72		1. Nov.	— 0,80
	1. Juni	+ 0,34		1. Dec.	— 0,40

Der nach Anleitung dieses § beobachtete Winkel zählt von der Strecke A B, deren Neigung gegen die Mittagslinie zu bestimmen war, rechts herum bis in die Südrichtung der Mittagslinie. Hieraus kann die Neigung im Sinne der Geodäten, d. h. der von der Nordrichtung der Mittagslinie rechts herum bis zur Strecke A B zählende Winkel leicht gefunden werden.

II. Methode der kleinsten Quadrate.

§ 4.

Princip.

Bei wiederholter Messung einer und derselben Grösse werden wir infolge der unvermeidlichen, in der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente begründeten kleinen Messungsfehler, lauter um ein Geringes von einander abweichende Resultate erzielen, und es entsteht uns nun die Aufgabe, aus allen diesen verschiedenen Resultaten denjenigen Werth zu finden, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, dass er dem wahren Werthe der gemessenen Grösse am nächsten komme.

Wir sind gewöhnt, und es entspricht dies einem gewissen praktischen Gefühle, das arithmetische Mittel aus allen direkten Beobachtungen als einen, dem wahren Werthe der gemessenen Grösse sehr nahe kommenden Werth anzusehen. Das arithmetische Mittel hat nun folgende sehr merkwürdige Eigenschaft:

Bezeichnen wir die durch Messung gewonnenen Grössen mit $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Grösse mit x, die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, um zum Werthe x zu gelangen, mit $v_1\ v_2 \ldots v_n$, so dass also

$$x - l_1 = v_1$$
$$x - l_2 = v_2$$
etc.

und setzen wir das arithmetische Mittel $\frac{l_1 + l_2 + . + l_n}{n} = M$, so wird die Summe der Quadrate der Verbesserungen für $x = M$ ein Minimum, also

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + . . + v_n^2 = \text{minimum},$$

oder nach üblicher Schreibweise:

$$[v\,v] = \text{minim.}$$

Differentiiren wir nämlich die Gleichung

$$[v\,v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + . . . (x - l_n)^2$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,x} = 2\,(x - l_1) + 2\,(x - l_2) + . . . + 2\,(x - l_n)$$
$$= 2\,n\,x - 2\,(l_1 + l_2 + . . . + l_n).$$

Setzen wir gemäss Theil I. § 35. diesen Differentialquotienten $= 0$, also

$$0 = 2\,n\,x - 2\,(l_1 + l_2 + . . . + l_n)$$

so erhalten wir denjenigen Werth für x, welcher die Funktion $[v\,v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + . . . (x - l_n)^2$ zum Minimum macht, nämlich

$$\mathbf{x = \frac{l_1 + l_2 + . . . + l_n}{n} = M.} \tag{61}$$

Da wir nun gewöhnt sind, das arithmetische Mittel als wahrscheinlichsten Werth anzusehen, so ist hieraus der Satz hervorgegangen, dass man allgemein denjenigen Werth als den wahrscheinlichsten anzusehen hat, welcher die Summe der Quadrate der Verbesserungen zum Minimum macht.

Die Verbesserungen sind nach Obigen

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = M - l_1 \\ v_2 = M - l_2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{62}$$

welche Gleichungen Fehlergleichungen heissen. Ihre Summe giebt:

$$[v] = n\,M - [l]$$

oder nach (61):

$$\mathbf{[v] = n\,\frac{[l]}{n} - [l] = 0.} \tag{63}$$

D. h. die Summe der Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen ist $= 0$. In dieser Gleichung ist eine Probe für die Bildung des arithmetischen Mittels gegeben.

§ 5.

Die mittleren Fehler.*)

Denkt man sich statt der n wirklich ausgeführten Beobachtungen n andere, welche sämmtlich unter sich gleich sind und einen solchen Werth haben, dass die Summe der Quadrate ihrer n gleichen Fehler a der Quadratsumme der Fehler v der wirklichen Beobachtungen gleich ist, so ist

$$[a\,a] = [v\,v]$$

oder

$$n\,a^2 = [v\,v]$$

also

$$a = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}. \tag{64}$$

*) Wilski, Einführung in die Katasteranw. IX.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN