Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 7. Gewichte der Beobachtungen. Allgemeines arithmetisches Mittel

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Beispielsweise ist der mittlere Fehler einer gemessenen Länge proportional der Quadratwurzel der in derselben enthaltenen Kettenlängen, d. h. proportional der Quadratwurzel ihrer Länge. Ist also m der mittlere Fehler der Längeneinheit, so ist der mittlere Fehler der Länge s:

$$m = m\sqrt{s}.$$

Enthält aber die Längenmessung ausser den zufälligen Fehlern noch einen **constanten** Fehler, so ist dieser der Länge s proportional. Ist m' der constante Fehler der Längeneinheit, so ist der der ganzen Länge $= m' s$.

Ist m der mittlere Fehler der einzelnen Winkel eines Polygons, so ist $m\sqrt{n}$ der Fehlbetrag der Winkelsumme gegen die theoretische Winkelsumme $2n - 4$ R., oder zeigt umgekehrt die Summe der gemessenen Winkel eines Polygons gegen das Soll den Widerspruch w, so ist $\frac{w}{\sqrt{n}}$ der mittlere Fehler der Beobachtungen.

§ 7.

Gewichte der Beobachtungen. Allgemeines arithmetisches Mittel.

Je genauer eine Beobachtung ist, um so geringer wird ihr mittlerer Fehler sein. Die Genauigkeit ist dem mittleren Fehler umgekehrt proportional. Demnach verhält sich z. B. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus n Beobachtungen umgekehrt wie der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, also nach (70a) direkt wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen. Ist demnach einer Beobachtung der mittlere Fehler m beizulegen, so werden 4, 9, 16 Beobachtungen erforderlich sein, wenn man den mittleren Fehler des Mittels auf $^1/_2$ m, $^1/_3$ m, $^1/_4$ m herabdrücken will. Weiss man beispielsweise aus Erfahrung, dass man von einem Theodolit einen mittleren Fehler von 30'' zu erwarten hat, so wird man mit diesem Instrumente einen Winkel 4 mal, 9 mal etc. messen müssen, wenn man denselben 15'', 10'' etc. genau erhalten will. Oder hat man zwei Instrumente, von denen eines eine n mal so genaue Beobachtung gestattet, als das andere, so wird man mit letzterem n^2 Beobachtungen ausführen müssen, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, welche das bessere Instrument mit einer einzigen Beobachtung erzielt. Hätte man mit beiden Instrumenten nur **eine** Beobachtung ausgeführt, so würde man der mit dem besseren Instrumente ausgeführten Beobachtung ein n^2faches Gewicht, gegenüber der mit dem anderen Instrumente ausgeführten Beobachtung beizumessen haben. Die den einzelnen Beobachtungen beizulegenden Gewichte verhalten sich also wie die Quadrate der Genauigkeiten, oder umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler. Bezeichnen wir die Gewichte zweier Beobachtungen, denen die mittleren Fehler m_1 und m_2 beizumessen sind, mit p_1 und p_2, so ist also

$$\left.\begin{aligned} p_1 : p_2 &= \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} \\ \text{oder} \qquad m_1 : m_2 &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Hätten wir zwei Beobachtungen mit den Gewichten p_1 und p_2 und sollten wir den wahrscheinlichsten Werth der beobachteten Grösse ermitteln, so werden wir statt der einen Beobachtung mit dem Gewichte p_1 setzen können p_1 Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Statt der Beobachtung mit dem Gewichte p_2 können wir setzen p_2 Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Wir erhalten somit $p_1 + p_2$ Beobachtungen von gleichem Gewichte, und werden nun das arithmetische Mittel aus denselben als wahrscheinlichsten Werth anzusehen haben. Seien die Beobachtungen mit den Gewichten $p_1\, p_2 \ldots p_n = l_1\, l_2 \ldots l_n$, so erhalten wir als wahrscheinlichsten Werth

$$x = \frac{l_1 + l_1 + \ldots (p_1 \text{ mal}) + l_2 + l_2 + \ldots (p_2 \text{ mal}) + \ldots}{p_1 + p_2 + \ldots}$$

oder

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{p_1\, l_1 + p_2\, l_2 + \ldots + l_n}}{\mathbf{p_1 + p_2 + \ldots p_n}}. \tag{73}$$

Wir finden also das arithmetische Mittel aus mehreren Beobachtungen von verschiedenem Gewichte, — **allgemeines arithmetisches Mittel** —, wenn wir jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multipliciren und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Gewichte dividiren. Analog der Gl. (63) erhalten wir als Rechenprobe:

$$[p\, v] = 0. \tag{73a}$$

§ 8.

Die drei Hauptaufgaben der Ausgleichungsrechnung.

1) **Ausgleichung direkter Beobachtungen.** Eine Grösse ist direkt wiederholt gemessen.

2) **Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.** Es sind die wahrscheinlichsten Werthe mehrerer von einander unabhängiger Grössen zu ermitteln, welche nicht direkt gemessen worden sind, an deren Stelle aber mehrere andere Grössen beobachtet sind, aus denen die gesuchten Grössen sich ableiten lassen, welche also Funktionen der Unbekannten sind.

3) **Ausgleichung bedingter Beobachtungen.** Die unmittelbar beobachteten Grössen müssen gewissen Bedingungen genügen, z. B. die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks muss 180° betragen.

Die Ausgleichung direkter Beobachtungen ist im § 5 behandelt. Wir haben gesehen, dass das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Grösse liefert, was uns zu den Fehlergleichungen

$$v_1 = M - l_1$$
$$v_2 = M - l_2$$
$$\text{etc.}$$

führte. Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen wurde $m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$ gefunden. Analog wird der mittlere Fehler, wenn den Beobachtungen verschiedene Gewichte beizumessen sind

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{\mathbf{p\,[v\,v]}}{\mathbf{[p] - 1}}} \tag{74}$$

erhalten. — Vergl. § 7.

Um den mittleren Fehler eines Theodolit zu bestimmen, beobachtet man einen Winkel wiederholt, bildet das arithmetische Mittel, sodann die Verbesserungen v und findet den mittleren Fehler des Instruments nach der Formel $m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$.