



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Anfangsgründe der niederen Geodäsie**

**Loewe, Hans**

**Liebenwerda, 1892**

§ 9. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](#)

## § 9.

## Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

## a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Nehmen wir an, es seien die Coordinaten  $x$  und  $y$  eines Punktes  $P$ , — Fig. 26 — zu ermitteln. Die Punkte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  seien durch ihre Coordinaten gegeben, so können wir die Coordinaten des Punktes  $P$  durch vermittelnde Beobachtungen verschiedener Art bestimmen, z. B. indem wir die Neigungen  $a_1 a_2 a_3 \dots$  der Strahlen  $P_1 P, P_2 P \dots$  gegen die Abscissenaxe (Meridian) beobachten, oder indem wir die Strecken  $s_1 s_2 s_3 \dots$  messen und dergl. mehr. Nehmen wir an, wir hätten die Strecken  $s$  gemessen, so würden zwei Strecken zur Bestimmung des Punktes  $P$  genügen. Alle übrigen gemessenen Strecken sind überschüssige Beobachtungen. Durch die Messung blos **zweier** Strecken würde nur eine einmalige Bestimmung des Punktes möglich sein. Die bei der Beobachtung begangenen Fehler können nicht zu Tage treten. Wir erkennen dieselben aber sofort, wenn noch eine oder mehrere Strecken zu Gebote stehen. Gesetzt, wir hätten aus den Strecken  $s_1$  und  $s_2$  die Coordinaten des Punktes  $P$  berechnet, so können wir aus den so gewonnenen Coordinaten, die wir mit  $\eta$  und  $\xi$  bezeichnen wollen, und aus den bekannten Coordinaten der Punkte  $P_3, P_4 \dots$  die Strecken  $s_3, s_4 \dots$  mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes ableiten. Die Differenzen der so erhaltenen Streckenlängen gegen die durch direkte Messung gefundenen Längen  $s$  geben uns Aufschluss über die begangenen Fehler. Es wird nun darauf ankommen, den Punkt  $P$  durch Änderung seiner vorläufigen Coordinaten  $\eta$  und  $\xi$  so zu verschieben, dass, wenn die aus den so erhaltenen **endgültigen** Coordinaten abgeleiteten Strecken  $s$  mit den beobachteten Strecken verglichen werden, die Summe der Quadrate der sich ergebenden Unterschiede, (d. h. der an den gemessenen Strecken durch diese Änderung der Coordinaten angebrachten Verbesserungen), ein Minimum werde.

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass zu einer **einmaligen** Bestimmung des Punktes  $P$  nicht immer grade **zwei** Elemente, wie hier zwei Strecken  $s$  oder zwei Neigungen  $a$ , erforderlich sind. Wir werden z. B. später sehen, dass wenn dieser Punkt durch blosse Winkelmessung auf demselben bestimmt werden soll, zu einer einmaligen Bestimmung 3 Richtungen von  $P$  aus nach gegebenen Punkten hin zu messen sind.

2) Wir bezeichnen nun allgemein die ausgeführten Beobachtungen mit  $l_1, l_2 l_3 \dots l_n$ , wählen aus denselben so viele Beobachtungen aus, als zu einer einmaligen Bestimmung der gesuchten Grössen  $\eta$  und  $\xi$  erforderlich sind, und berechnen aus diesen die genäherten Werthe  $\eta$  und  $\xi$ . Wir sind nunmehr im Stande, mit Hülfe der genäherten  $\eta$  und  $\xi$  umgekehrt die beobachteten Grössen herzuleiten, und bezeichnen die durch diese Rechnungen gefundenen Werthe correspondierend mit  $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ . Alsdann ergeben sich die Widersprüche:

$$\begin{aligned}\lambda_1 - l_1 &= f_1 \\ \lambda_2 - l_2 &= f_2 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

oder allgemein:  $\lambda - l = f$ . (75)

Andern wir nun die zur Berechnung der Grössen  $\lambda$  benutzten Coordinaten  $\eta$  und  $\xi$  um die kleinen Beträge  $\delta \eta$  und  $\delta \xi$ , so werden sich auch die Grössen  $\lambda$ , welche Funktionen von  $\eta$  und  $\xi$  sind, ( $\lambda = f(\eta, \xi)$ ), um kleine Beträge  $\delta \lambda$  ändern, und wir sind im Stande, mit Hülfe der Differentialrechnung die Änderungen  $\delta \lambda$

durch die Änderungen  $\delta y$  und  $\delta x$  auszudrücken. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Differentialquotienten der Funktion  $\lambda = f(y, y)$  nach  $y$  und  $x$  mit  $a$  und  $b$ , so ist nach (29)  $\delta \lambda = a \delta x + b \delta y$ . (76)

Hierin verstehen wir unter  $\delta x$  und  $\delta y$  die uns noch unbekannten Verbesserungen, welche wir den genäherten Werthen  $y$  und  $y$  beizulegen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe  $x$  und  $y$  der gesuchten Grössen zu erhalten. Die Grössen  $\lambda$  werden durch diese Verbesserungen übergehen in  $\lambda + \delta \lambda$ . Vergleichen wir diese endgültigen Werthe  $\lambda + \delta \lambda$  mit den durch Beobachtung ermittelten Werthen  $l$ , so werden die bei der Beobachtung begangenen Fehler  $v$  erscheinen, oder richtiger die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen  $l$  beizulegen haben, wenn die mit Hülfe dieser verbesserten Beobachtungen berechneten Grössen  $x$  und  $y$  ihren wahrscheinlichsten Werth erhalten sollen. Man findet:

$$\begin{aligned} v &= \lambda + \delta \lambda - l \\ \text{oder nach (76)} \quad v &= a \delta x + b \delta y + f \\ \text{oder einzeln:} \quad v_1 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y + f_1 \\ &\quad v_2 = a_2 \delta x + b_2 \delta y + f_2 \\ &\quad \vdots \quad \vdots \\ &\quad v_n = a_n \delta x + b_n \delta y + f_n \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (77)$$

Es kommt nun darauf an, in diesen **Fehlergleichungen** die noch unbekannten Coordinatenverbesserungen  $\delta y$  und  $\delta x$  so zu bestimmen, dass

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = [vv] = \text{minimum}. \quad (78)$$

Wir werden zu dem Ende die Gleichungen (77) quadriren und erhalten  $n$  Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$v^2 = a^2 \delta x^2 + 2ab \delta x \delta y + 2af \delta x + b^2 \delta y^2 + 2bf \delta y + f^2$$

und durch Summierung dieser  $n$  Gleichungen:

$$[vv] = [aa] \delta x^2 + 2[ab] \delta x \delta y + 2[af] \delta x + [bb] \delta y^2 + 2[bf] \delta y + [ff].$$

Soll nun  $[vv]$  ein Minimum werden, so haben wir diese Gleichung partiell nach  $\delta x$  und  $\delta y$  zu differentiiren und die partiellen Differentialquotienten  $\frac{d[vv]}{d(\delta x)}$  und  $\frac{d[vv]}{d(\delta y)} = 0$  zu setzen und aus den so erhaltenen Gleichungen  $\delta x$  und  $\delta y$  zu entwickeln. Die Differentiation nach  $\delta x$  ergibt:

$$\frac{d[vv]}{d(\delta x)} = [aa] \delta x + 2[ab] \delta x + 2[af]$$

und die Differentiation nach  $\delta y$ :

$$\frac{d[vv]}{d(\delta y)} = 2[ab] \delta x + 2[bb] \delta y + 2[bf].$$

Setzen wir diese Differentialquotienten  $= 0$ , so ergeben sich die **Normalgleichungen**:

$$\begin{aligned} [aa] \delta x + [ab] \delta y + [af] &= 0 \\ [ab] \delta x + [bb] \delta y + [bf] &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (79)$$

3) **Die Auflösung der Normalgleichungen** nach den Unbekannten  $\delta y$  und  $\delta x$  erfolgt in der preussischen Vermessungsanweisung nach folgender Schablone: Dieselben erhalten zunächst durch Einführung kürzerer Zeichen die Form:

$$\begin{aligned} I \quad 0 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y + f_1 \\ II \quad 0 &= b_1 \delta x + b_2 \delta y + f_2 \end{aligned}$$

Aus I erhalten wir durch Multiplication mit  $\frac{b_1}{a_1}$

$$\text{III } 0 = b_1 \delta x + \frac{b_1}{a_1} b_1 \delta y + \frac{b_1}{a_1} f_1$$

und wenn wir III von II abziehen:

$$0 = \delta y \left( b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 \right) + f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1.$$

Setzt man den Klammerausdruck =  $b_2$ , die Summe des zweiten und dritten Gliedes =  $f_2$ , so erhält man

$$\text{IV } 0 = b_2 \delta y + f_2$$

$$\delta y = -\frac{f_2}{b_2}. \quad (80)$$

Durch Einsetzung des Werthes für  $\delta y$  in I wird erhalten:

$$\delta x = -\frac{f_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \delta y. \quad (81)$$

Rechenprobe: Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen kann man sich wie folgt verschaffen: Multipliziert man (81) mit  $f_1$ , addirt beiderseits  $f_2 \delta y$ , so erhält man:

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \delta y + f_2 \delta y$$

oder nach (80)

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left( \frac{b_1}{a_1} f_1 - f_2 \right) \left( -\frac{f_2}{b_2} \right)$$

$$= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left( f_2 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \right) \frac{f_2}{b_2}$$

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{f_2}{b_2} f_2.$$

Man erhält also eine Probe, wenn man

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= f_1 \delta x + f_2 \delta y \quad \text{und} \\ \Sigma &= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{f_2}{b_2} f_2 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

aus jeder dieser beiden Gleichungen berechnet und die beiden Resultate vergleicht.

Eine Probe für die richtige Bildung der Werthe  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $f_1$ ,  $b_2$  und  $f_2$  erhält man wie folgt: Man berechnet die Verbesserungen  $v$  nach den Gleichungen (77), quadriert die einzelnen  $v$  und die Fehler  $f$ , dann muss zunächst die Summe der Fehlerquadrate  $[ff]$  grösser sein, als die zum Minimum gewordene Summe  $[vv]$ . Eine schärfere Probe geht aber noch aus Folgendem hervor: Es ist:

$$\begin{aligned} [vy] &= [(a \delta x + b \delta y + f)^2] \\ &= [aa] \delta x^2 + 2[ab] \delta x \delta y + [bb] \delta y \delta y + 2[af] \delta x \\ &\quad + 2[bf] \delta y + [ff] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [vv] &= [(a \delta x + [ab] \delta y + [af] \delta x + [bb] \delta y + [bf] \delta y)^2] \\ &\quad + [af] \delta x + [bf] \delta y + [ff] \end{aligned}$$

die beiden Klammerausdrücke sind nach (79) = 0, also ist:

$$\begin{aligned} [vv] - [ff] &= [af] \delta x + [bf] \delta y \\ &= f_1 \delta x + f_2 \delta y \end{aligned}$$

oder nach (82)

$$[vv] - [ff] = \Sigma. \quad (83)$$

4) Auflösung der Normalgleichungen mit vier Unbekannten: Hätten wir  
4 Normalgleichungen mit vier Unbekannten (vergl. § 26), von der Form:

$$0 = [a a] \delta x_a + [a b] \delta y_a + [a c] \delta x_b + [a d] \delta y_b + [a f]$$

$$0 = [a b] \delta x_a + [b b] \delta y_a + [b c] \delta x_b + [b d] \delta y_b + [b f]$$

$$0 = [a c] \delta x_a + [b c] \delta y_a + [c c] \delta x_b + [c d] \delta y_b + [c f]$$

$$0 = [a d] \delta x_a + [b d] \delta y_a + [c d] \delta x_b + [d d] \delta y_b + [d f]$$

so schreiben wir dieselben zunächst unter einfacherer Bezeichnung der Faktoren:

$$\text{I } 0 = a_1 \delta x_a + b_1 \delta y_a + c_1 \delta x_b + d_1 \delta y_b + f_1$$

$$\text{II } 0 = b_1 \delta x_a + b_2 \delta y_a + c_2 \delta x_b + d_2 \delta y_b + f_2$$

$$\text{III } 0 = c_1 \delta x_a + c_2 \delta y_a + c_3 \delta x_b + d_3 \delta y_b + f_3$$

$$\text{IV } 0 = d_1 \delta x_a + d_2 \delta y_a + d_3 \delta x_b + d_4 \delta y_b + f_4$$

Multiplicieren wir I der Reihe nach mit  $\frac{b_1}{a_1}$ ,  $\frac{c_1}{a_1}$ ,  $\frac{d_1}{a_1}$  und ziehen die so erhaltenen  
3 Gleichungen der Reihe nach von den Gleichungen II, III, IV ab, so erhalten  
wir 3 neue Gleichungen mit nur 3 Unbekannten:

$$1) 0 = \left( b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 \right) \delta y_a + \left( c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 \right) \delta x_b + \left( d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1 \right) \delta y_b + \left( f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1 \right)$$

oder unter einfacherer Bezeichnung der Klammergrößen:

$$\text{V } 0 = b_2 \delta y_a + c_2 \delta x_b + d_2 \delta y_b + f_2$$

$$2) 0 = \left( c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 \right) \delta y_a + \left( c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 \right) \delta x_b + \left( d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 \right) \delta y_b + \left( f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 \right)$$

Hierin ist die erste Klammergrösse = dem früheren  $c_2$ , also

$$\text{VI } c_2 \delta y_a + \left( c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 \right) \delta x_b + \left( d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 \right) \delta y_b + \left( f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 \right)$$

$$3) 0 = \left( d_2 - \frac{b_1}{a_1} d_1 \right) \delta y_a + \left( d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1 \right) \delta x_b + \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 \right)$$

worin die erste Klammergrösse =  $d_2$  ist, also:

$$\text{VII } 0 = d_2 \delta y_a + \left( d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1 \right) \delta x_b + \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 \right).$$

Multiplicieren wir die erste der drei neuen Gleichungen, (V), der Reihe nach  
mit  $\frac{c_2}{b_2}$  und  $\frac{d_2}{b_2}$  und ziehen die Resultate von den beiden anderen Gleichungen VI  
und VII ab, so erhalten wir zwei neue Gleichungen, welche nur noch die Un-  
bekannten  $\delta x_b$  und  $\delta y_b$  enthalten:

$$1) 0 = \left( c_1 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{c_2}{b_2} c_2 \right) \delta x_b + \left( d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2 \right) \delta y_b + \left( f_3 - \frac{f_1}{a_1} b_1 - \frac{f_2}{b_2} c_2 \right)$$

oder wenn wir einfache Zeichen für die Klammergrößen einführen:

$$\text{VIII } 0 = c_3 \delta x_b + d_3 \delta y_b + f_3.$$

$$2) 0 = \left( d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2 \right) \delta x_b + \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 \right)$$

worin die erste Klammergrösse gleich dem früheren  $d_3$  ist, also

$$\text{IX } 0 = d_3 \delta x_b + \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 \right)$$

Multipliciren wir weiter VIII mit  $\frac{d_3}{c_3}$  und ziehen das Resultat von IX ab,  
so ergiebt sich:

$$0 = \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 - \frac{d_3}{c_3} d_3 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 - \frac{f_3}{c_3} d_3 \right)$$

oder unter Einführung einfacherer Zeichen für die Klammergrössen:

$$X \quad 0 = d_4 \delta y_b + f_4.$$

Nunmehr ergeben sich die Unbekannten wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \delta y_b = -\frac{f_4}{d_4} \text{ (aus X)} \\ \delta x_b = -\frac{f_3}{c_3} - \frac{d_3}{c_3} \delta y_b \text{ (aus VIII)} \\ \delta y_a = -\frac{f_2}{b_2} - \frac{d_2}{b_2} \delta y_b - \frac{c_2}{b_2} \delta x_b \text{ (aus V)} \\ \delta x_a = -\frac{f_1}{a_1} - \frac{d_1}{a_1} \delta y_b - \frac{c_1}{a_1} \delta x_b - \frac{b_1}{a_1} \delta y_a \text{ (aus I).} \end{array} \right\} \quad (84)$$

Um das Gesetz des Coofficientenbaues deutlicher vor Augen zu führen, stellen wir die Coofficienten hier nochmals zusammen, und glauben, dass es danach leicht sein wird, auch bei noch mehreren Unbekannten die weiteren Coofficienten ohne Weiteres anzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 = b_2 \\ c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 = c_2 \\ d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1 = d_2 \\ f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1 = f_2 \\ \\ c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{c_2}{b_2} c_2 = c_3 \\ d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2 = d_3 \\ f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 - \frac{f_2}{b_2} c_2 = f_3 \\ \\ d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 - \frac{d_3}{c_3} d_3 = d_4 \\ f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 - \frac{f_3}{c_3} d_3 = f_4 \end{array} \right\} \quad (85)$$

Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen giebt die den Gleichungen (82) analoge Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma = -\frac{f_1}{a} f_1 - \frac{f_2}{b_2} f_2 - \frac{f_3}{c_3} f_3 - \frac{f_4}{d_4} f_4 \\ \Sigma = f_1 \delta x_a + f_2 \delta y_a + f_3 \delta x_b + f_4 \delta y_b \end{array} \right\} \quad (86)$$

5) **Mittlerer Fehler.** Derselbe ist analog (69) zu bilden. Ist  $q$  die Anzahl der Beobachtungen, welche zu einer **einmaligen** Bestimmung der gesuchten Größen erforderlich ist, so sind  $n - q$  Beobachtungen **überschüssige**. Der mittlere Fehler wird also sein:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n - q}}. \quad (87)$$

#### b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

Sind den einzelnen Beobachtungen verschiedene Gewichte beizulegen, so sind die Quadrate und Produkte der Coofficienten der Normalgleichungen mit den ihnen zukommenden Gewichten  $p$  zu multipliciren. Die Normalgleichungen für 2 Unbekannte werden also z. B. lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= [p a a] \delta x + [p a b] \delta y + [p a f] \\ 0 &= [p a b] \delta x + [p b b] \delta y + [p b f] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (88a)$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich aus der Gleichung

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - q}}. \quad (88b)$$

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen sind dann nach (72):

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \text{ etc.} \quad (88c)$$

### § 10.

#### Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

##### a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Die Beobachtungen haben gewissen Bedingungen zu genügen, z. B. im Dreiecksnetz Fig. 27 folgenden:

- 1)  $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 180^\circ$
- 2)  $\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6 = 180^\circ$
- 3)  $\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_9 = 180^\circ$
- 4)  $\gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_9 = 360^\circ$

Zu diesen ohne Weiteres verständlichen Bedingungen kommt noch eine 5. Bedingung. Bezeichnen wir nämlich die drei innerhalb des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten mit  $a, b, c$ , so ist nach dem Sinussatze:

$$a = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \cdot b$$

$$b = \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_5} \cdot c$$

$$c = \frac{\sin \alpha_7}{\sin \beta_8} \cdot a$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 \sin \alpha_7}{\sin \beta_2 \sin \beta_5 \sin \beta_8} = 1 \quad (89)$$

oder

$$5) \log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_4 + \log \sin \alpha_7 - \log \sin \beta_2 - \log \sin \beta_5 - \log \sin \beta_8 = 0. \quad (89a)$$

Wäre die Bedingung 5) nicht erfüllt, und berechnete man, von der als bekannt vorausgesetzten Dreiecksseite  $a$  ausgehend, nach und nach die Dreiecke I, II, III, so würde die aus dem Dreiecke III berechnete Länge für  $a$  nicht mit der der Rechnung zu Grunde gelegten Dreiecksseite  $a$  übereinstimmen, wenn auch die Bedingungen 1)–4) erfüllt sind.