Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit. (1. Einleitende Erläuterungen. 2. Aufstellen der Fehlergleichungen und Entwickelung der Normalgleichungen aus denselben. 3. Auflösung der Normalgleichungen ...

§ 9.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Nehmen wir an, es seien die Coordinaten x und y eines Punktes P, — Fig. 26 — zu ermitteln. Die Punkte P_1, P_2, P_3 . . . seien durch ihre Coordinaten gegeben, so können wir die Coordinaten des Punktes P durch vermittelnde Beobachtungen verschiedener Art bestimmen, z. B. indem wir die Neigungen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ der Strahlen $P_1 P$, $P_2 P$ . . . gegen die Abscissenaxe (Meridian) beobachten, oder indem wir die Strecken $s_1\ s_2\ s_3$ . . . . messen und dergl. mehr. Nehmen wir an, wir hätten die Strecken s gemessen, so würden zwei Strecken zur Bestimmung des Punktes P genügen. Alle übrigen gemessenen Strecken sind überschüssige Beobachtungen. Durch die Messung blos **zweier** Strecken würde nur eine einmalige Bestimmung des Punktes möglich sein. Die bei der Beobachtung begangenen Fehler können nicht zu Tage treten. Wir erkennen dieselben aber sofort, wenn noch eine oder mehrere Strecken zu Gebote stehen. Gesetzt, wir hätten aus den Strecken s_1 und s_2 die Coordinaten des Punktes P berechnet, so können wir aus den so gewonnenen Coordinaten, die wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen wollen, und aus den bekannten Coordinaten der Punkte P_3, P_4 . . . die Strecken s_3, s_4 . . . mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes ableiten. Die Differenzen der so erhaltenen Streckenlängen gegen die durch direkte Messung gefundenen Längen s geben uns Aufschluss über die begangenen Fehler. Es wird nun darauf ankommen, den Punkt P durch Aenderung seiner vorläufigen Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ so zu verschieben, dass, wenn die aus den so erhaltenen **endgültigen** Coordinaten abgeleiteten Strecken s mit den beobachteten Strecken verglichen werden, die Summe der Quadrate der sich ergebenden Unterschiede, (d. h. der an den gemessenen Strecken durch diese Aenderung der Coordinaten angebrachten Verbesserungen), ein Minimum werde.

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass zu einer **einmaligen** Bestimmung des Punktes P nicht immer grade **zwei** Elemente, wie hier zwei Strecken s oder zwei Neigungen α, erforderlich sind. Wir werden z. B. später sehen, dass wenn dieser Punkt durch blosse Winkelmessung auf demselben bestimmt werden soll, zu einer einmaligen Bestimmung 3 Richtungen von P aus nach gegebenen Punkten hin zu messen sind.

2) Wir bezeichnen nun allgemein die ausgeführten Beobachtungen mit l_1, $l_2\ l_3$ . . . l_n, wählen aus denselben so viele Beobachtungen aus, als zu einer einmaligen Bestimmmung der gesuchten Grössen y und x erforderlich sind, und berechnen aus diesen die genäherten Werthe $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$. Wir sind nunmehr im Stande, mit Hülfe der genäherten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ umgekehrt die beobachteten Grössen herzuleiten, und bezeichnen die durch diese Rechnungen gefundenen Werthe correspondierend mit λ_1, $\lambda_2\ \lambda_3$ . . . λ_n. Alsdann ergeben sich die Widersprüche:

$$\lambda_1 - l_1 = f_1$$
$$\lambda_2 - l_2 = f_2$$
etc.

oder allgemein: $$\lambda - l = f. \qquad (75)$$

Aendern wir nun die zur Berechnung der Grössen λ benutzten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ um die kleinen Beträge $\delta\,y$ und $\delta\,x$, so werden sich auch die Grössen λ, welche Funktionen von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ sind, $(\lambda = f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}))$, um kleine Beträge $\delta\,\lambda$ ändern, und wir sind im Stande, mit Hülfe der Differentialrechnung die Aenderungen $\delta\,\lambda$

durch die Aenderungen δy und δx auszudrücken. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\lambda = f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ nach $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ mit a und b, so ist nach (29)

$$\delta \lambda = a\,\delta x + b\,\delta y. \tag{76}$$

Hierin verstehen wir unter δx und δy die uns noch unbekannten Verbesserungen, welche wir den genäherten Werthen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beizulegen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe x und y der gesuchten Grössen zu erhalten. Die Grössen λ werden durch diese Verbesserungen übergehen in $\lambda + \delta\lambda$. Vergleichen wir diese endgültigen Werthe $\lambda + \delta\lambda$ mit den durch Beobachtung ermittelten Werthen l, so werden die bei der Beobachtung begangenen Fehler v erscheinen, oder richtiger die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen l beizulegen haben, wenn die mit Hülfe dieser verbesserten Beobachtungen berechneten Grössen x und y ihren wahrscheinlichsten Werth erhalten sollen. Man findet:

$$v = \lambda + \delta\lambda - l$$

oder nach (76)

$$v = a\,\delta x + b\,\delta y + f$$

oder einzeln:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + f_1 \\ v_2 &= a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + f_2 \\ &\;\;\vdots \\ v_n &= a_n\,\delta x + b_n\,\delta y + f_n \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Es kommt nun darauf an, in diesen **Fehlergleichungen** die noch unbekannten Coordinatenverbesserungen δy und δx so zu bestimmen, dass

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = [v\,v] = \text{minimum}. \tag{78}$$

Wir werden zu dem Ende die Gleichungen (77) quadriren und erhalten n Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$v^2 = a^2\,\delta x^2 + 2\,a\,b\,\delta x\,\delta y + 2\,a\,f\,\delta x + b^2\,\delta y^2 + 2\,b\,f\,\delta y + f^2$$

und durch Summirung dieser n Gleichungen:

$$[v\,v] = [a\,a]\,\delta x^2 + 2\,[a\,b]\,\delta x\,\delta y + 2\,[a\,f]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y^2 + 2\,[b\,f]\,\delta y + [f\,f].$$

Soll nun $[v\,v]$ ein Minimum werden, so haben wir diese Gleichung partiell nach δx und δy zu differentiiren und die partiellen Differentialquotienten $\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta x)}$ und $\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta y)} = 0$ zu setzen und aus den so erhaltenen Gleichungen δx und δy zu entwickeln. Die Differentiation nach δx ergiebt:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta x)} = [a\,a]\,\delta x + 2\,[a\,b]\,\delta x + 2\,[a\,f]$$

und die Differentiation nach δy:

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,(\delta y)} = 2\,[a\,b]\,\delta x + 2\,[b\,b]\,\delta y + 2\,[b\,f].$$

Setzen wir diese Differentialquotienten $= 0$, so ergeben sich die **Normalgleichungen:**

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,\delta x + [a\,b]\,\delta y + [a\,f] &= 0 \\ [a\,b]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y + [b\,f] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

3) **Die Auflösung der Normalgleichungen** nach den Unbekannten δy und δx erfolgt in der preussischen Vermessungsanweisung nach folgender Schablone: Dieselben erhalten zunächst durch Einführung kürzerer Zeichen die Form:

$$\text{I} \quad 0 = a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + f_1$$
$$\text{II} \quad 0 = b_1\,\delta x + b_2\,\delta y + f_2$$

Aus I erhalten wir durch Multiplication mit $\frac{b_1}{a_1}$

$$\text{III} \quad 0 = b_1 \delta x + \frac{b_1}{a_1} b_1 \delta y + \frac{b_1}{a_1} f_1$$

und wenn wir III von II abziehen:

$$0 = \delta y \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 \right) + f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1.$$

Setzt man den Klammerausdruck $= \mathfrak{b}_2$, die Summe des zweiten und dritten Gliedes $= \mathfrak{f}_2$, so erhält man

$$\text{IV} \quad 0 = \mathfrak{b}_2 \delta y + \mathfrak{f}_2$$

$$\delta y = -\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2}. \tag{80}$$

Durch Einsetzung des Werthes für δy in I wird erhalten:

$$\delta x = -\frac{f_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \delta y. \tag{81}$$

Rechenprobe: Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen kann man sich wie folgt verschaffen: Multiplicirt man (81) mit f_1, addirt beiderseits $f_2 \delta y$, so erhält man:

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \delta y + f_2 \delta y$$

oder nach (80)

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left(\frac{b_1}{a_1} f_1 - f_2\right)\left(-\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2}\right)$$

$$= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \left(f_2 - \frac{b_1}{a_1} f_1\right)\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2}$$

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2.$$

Man erhält also eine Probe, wenn man

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= f_1 \delta x + f_2 \delta y \quad \text{und} \\ \Sigma &= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2 \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

aus jeder dieser beiden Gleichungen berechnet und die beiden Resultate vergleicht.

Eine Probe für die richtige Bildung der Werthe a_1, b_1, f_1, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ erhält man wie folgt: Man berechnet die Verbesserungen v nach den Gleichungen (77), quadrirt die einzelnen v und die Fehler f, dann muss zunächst die Summe der Fehlerquadrate [f f] grösser sein, als die zum Minimum gewordene Summe [v v]. Eine schärfere Probe geht aber noch aus Folgendem hervor: Es ist:

$$[v\,v] = [(a\,\delta x + b\,\delta y + f)^2]$$

$$= [a\,a]\,\delta x^2 + 2\,[a\,b]\,\delta x\,\delta y + [b\,b]\,\delta y\,\delta y + 2\,[a\,f]\,\delta x + 2\,[b\,f]\,\delta y + [f\,f]$$

$$[v\,v] = ([a\,a]\,\delta x + [a\,b]\,\delta y + [a\,f])\,\delta x + ([a\,b]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y + [b\,f])\,\delta y + [a\,f]\,\delta x + [b\,f]\,\delta y + [f\,f]$$

die beiden Klammerausdrücke sind nach (79) $= 0$, also ist:

$$[v\,v] - [f\,f] = [a\,f]\,\delta x + [b\,f]\,\delta y$$

$$= f_1\,\delta x + f_2\,\delta y$$

oder nach (82)

$$[v\,v] - [f\,f] = \Sigma. \tag{83}$$

4) **Auflösung der Normalgleichungen mit vier Unbekannten:** Hätten wir 4 Normalgleichungen mit vier Unbekannten (vergl. § 26), von der Form:

$$0 = [a\,a]\,\delta x_a + [a\,b]\,\delta y_a + [a\,c]\,\delta x_b + [a\,d]\,\delta y_b + [a\,f]$$
$$0 = [a\,b]\,\delta x_a + [b\,b]\,\delta y_a + [b\,c]\,\delta x_b + [b\,d]\,\delta y_b + [b\,f]$$
$$0 = [a\,c]\,\delta x_a + [b\,c]\,\delta y_a + [c\,c]\,\delta x_b + [c\,d]\,\delta y_b + [c\,f]$$
$$0 = [a\,d]\,\delta x_a + [b\,d]\,\delta y_a + [c\,d]\,\delta x_b + [d\,d]\,\delta y_b + [d\,f]$$

so schreiben wir dieselben zunächst unter einfacherer Bezeichnung der Faktoren:

$$\mathrm{I}\quad 0 = a_1\,\delta x_a + b_1\,\delta y_a + c_1\,\delta x_b + d_1\,\delta y_b + f_1$$
$$\mathrm{II}\quad 0 = b_1\,\delta x_a + b_2\,\delta y_a + c_2\,\delta x_b + d_2\,\delta y_b + f_2$$
$$\mathrm{III}\quad 0 = c_1\,\delta x_a + c_2\,\delta y_a + c_3\,\delta x_b + d_3\,\delta y_b + f_3$$
$$\mathrm{IV}\quad 0 = d_1\,\delta x_a + d_2\,\delta y_a + d_3\,\delta x_b + d_4\,\delta y_b + f_4$$

Multipliciren wir I der Reihe nach mit $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{d_1}{a_1}$ und ziehen die so erhaltenen 3 Gleichungen der Reihe nach von den Gleichungen II, III, IV ab, so erhalten wir 3 neue Gleichungen mit nur 3 Unbekannten:

$$1)\quad 0 = \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta x_b + \left(d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1\right) \delta y_b + \left(f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1\right)$$

oder unter einfacherer Bezeichnung der Klammergrössen:

$$\mathrm{V}\quad 0 = \mathfrak{b}_2\,\delta y_a + \mathfrak{c}_2\,\delta x_b + \mathfrak{d}_2\,\delta y_b + \mathfrak{f}_2$$

$$2)\quad 0 = \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

Hierin ist die erste Klammergrösse = dem früheren $\mathfrak{c}_2$, also

$$\mathrm{VI}\quad \mathfrak{c}_2\,\delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

$$3)\quad 0 = \left(d_2 - \frac{b_1}{a_1} d_1\right) \delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right)$$

worin die erste Klammergrösse = $\mathfrak{d}_2$ ist, also:

$$\mathrm{VII}\quad 0 = \mathfrak{d}_2\,\delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right).$$

Multipliziren wir die erste der drei neuen Gleichungen, (V), der Reihe nach mit $\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2}$ und $\frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2}$ und ziehen die Resultate von den beiden anderen Gleichungen VI und VII ab, so erhalten wir zwei neue Gleichungen, welche nur noch die Unbekannten δx_b und δy_b enthalten:

$$1)\quad 0 = \left(c_1 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} b_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right)$$

oder wenn wir einfache Zeichen für die Klammergrössen einführen:

$$\mathrm{VIII}\quad 0 = \mathfrak{c}_3\,\delta x_b + \mathfrak{d}_3\,\delta y_b + \mathfrak{f}_3\,.$$

$$2)\quad 0 = \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right)$$

worin die erste Klammergrösse gleich dem früheren $\mathfrak{d}_3$ ist, also

$$\mathrm{IX}\quad 0 = \mathfrak{d}_3\,d x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2\right)$$

Multipliciren wir weiter VIII mit $\frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3}$ und ziehen das Resultat von IX ab, so ergiebt sich:

$$0 = \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3\right)$$

oder unter Einführung einfacherer Zeichen für die Klammergrössen:

$$\text{X} \quad 0 = \mathfrak{d}_4 \, \delta y_b + \mathfrak{f}_4.$$

Nunmehr ergeben sich die Unbekannten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\delta y_b &= -\frac{\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{d}_4} \text{ (aus X)} \\
\delta x_b &= -\frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \delta y_b \text{ (aus VIII)} \\
\delta y_a &= -\frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \delta y_b - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \delta x_b \text{ (aus V)} \\
\delta x_a &= -\frac{f_1}{a_1} - \frac{d_1}{a_1} \delta y_b - \frac{c_1}{a_1} \delta x_b - \frac{b_1}{a_1} \delta y_a \text{ (aus I).}
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Um das Gesetz des Coofficientenbaues deutlicher vor Augen zu führen, stellen wir die Coofficienten hier nochmals zusammen, und glauben, dass es danach leicht sein wird, auch bei noch mehreren Unbekannten die weiteren Coofficienten ohne Weiteres anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}
& b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{b}_2 \\
& c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{c}_2 \\
& d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{d}_2 \\
& f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1 = \mathfrak{f}_2 \\
& c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_3 \\
& d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}_3 \\
& f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{f}_3 \\
& d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{d}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_4 \\
& f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{d}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{f}_4
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen giebt die den Gleichungen (82) analoge Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= -\frac{f_1}{a} f_1 - \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{b}_2} \mathfrak{f}_2 - \frac{\mathfrak{f}_3}{\mathfrak{c}_3} \mathfrak{f}_3 - \frac{\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{d}_4} \mathfrak{f}_4 \\
\Sigma &= f_1 \, \delta x_a + f_2 \, \delta y_a + f_3 \, \delta x_b + f_4 \, \delta y_b
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

5) **Mittlerer Fehler.** Derselbe ist analog (69) zu bilden. Ist q die Anzahl der Beobachtungen, welche zu einer **einmaligen** Bestimmung der gesuchten Grössen erforderlich ist, so sind n — q Beobachtungen **überschüssige.** Der mittlere Fehler wird also sein:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-q}}. \tag{87}$$

b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

Sind den einzelnen Beobachtungen verschiedene Gewichte beizulegen, so sind die Quadrate und Produkte der Coofficienten der Normalgleichungen mit den ihnen zukommenden Gewichten p zu multipliciren. Die Normalgleichungen für 2 Unbekannte werden also z. B. lauten:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [p\,a\,a]\,\delta x + [p\,a\,b]\,\delta y + [p\,a\,f] \\ 0 &= [p\,a\,b]\,\delta x + [p\,b\,b]\,\delta y + [p\,b\,f] \end{aligned}\right\} \tag{88a}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergiebt sich aus der Gleichung

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-q}}. \tag{88b}$$

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen sind dann nach (72):

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}},\; m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \text{ etc.} \tag{88c}$$

§ 10.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Die Beobachtungen haben gewissen Bedingungen zu genügen, z. B. im Dreiecksnetz Fig. 27 folgenden:

1) $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 180^\circ$
2) $\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6 = 180^\circ$
3) $\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_9 = 180^\circ$
4) $\gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_9 = 360^\circ$

Zu diesen ohne Weiteres verständlichen Bedingungen kommt noch eine 5. Bedingung. Bezeichnen wir nämlich die drei innerhalb des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten mit a, b, c, so ist nach dem Sinussatze:

$$a = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\,.\,b$$

$$b = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_5}\,.\,c$$

$$c = \frac{\sin\alpha_7}{\sin\beta_8}\,.\,a$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin\alpha_1\;\sin\alpha_4\;\sin\alpha_7}{\sin\beta_2\;\sin\beta_5\;\sin\beta_8} = 1 \tag{89}$$

oder

5) $\log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_4 + \log\sin\alpha_5 - \log\sin\beta_2 - \log\sin\beta_5 - \log\sin\beta_8 = 0.$ (89a)

Wäre die Bedingung 5) nicht erfüllt, und berechnete man, von der als bekannt vorausgesetzten Dreiecksseite a ausgehend, nach und nach die Dreiecke I, II, III, so würde die aus dem Dreiecke III berechnete Länge für a nicht mit der der Rechnung zu Grunde gelegten Dreiecksseite a übereinstimmen, wenn auch die Bedingungen 1)—4) erfüllt sind.