Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit. (1. Correlaten- und Normalgleichungen. 2. Mittlerer Fehler. 3. Beispiele.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

dieselben zugleich mit den Logarithmen der Sinus selbst. Lauter Winkel des ersten Quadranten vorausgesetzt, sind diese Coefficienten für die Winkel des Zählers in Gl. (89), also für die Winkel α, positiv, für die des Nenners, also für die Winkel β, negativ. Die Coefficienten e und der Widerspruch w_5 ermittelt sich demnach wie folgt:

		e		e
log sin α_1	9,664 931	4,0		
„ „ α_4	9,759 291	3,0		
„ „ α_7	9,666 040	4,0		
log sin β_2			9,718 669	— 3,8
„ „ β_5			9,655 357	— 4,1
„ „ β_8			9,716 172	— 2,5
Summa	9,090 262		9,090 198	
Verglichen	9,090 198			
Mithin	$w_5 = + 64$			

Zur Bildung der Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. der Normalgleichungen (92) benutzen wir das folgende Schema, zu welchem bemerkt wird, dass im Fusse desselben für die daselbst ermittelten Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. gemäss § 9, 4) die einfachen Bezeichnungen a_1, b_1 etc.

Beobachtung	a	b	c	d	e	a a	a b	a c	a d	a e	b b	b c	b d	b e	c c	c d	c e	d d	d e	e e
α_1	1	0	0	0	+ 4,0	1	„	„	„	+ 4,0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	16,0
β_2	1	0	0	0	— 3,8	1	„	„	„	— 3,8	„	„	„	„	„	„	„	„	„	14,4
γ_3	1	0	0	1	0	1	„	„	1	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	„
α_4	0	1	0	0	+ 3,0	„	„	„	„	„	1	„	„	+ 3,0	„	„	„	„	„	9,0
β_5	0	1	0	0	— 4,1	„	„	„	„	„	1	„	„	— 4,1	„	„	„	„	„	16,8
γ_6	0	1	0	1	0	„	„	„	„	„	1	„	1	„	„	„	„	1	„	„
α_7	0	0	1	0	+ 4,0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	+ 4,0	„	„	16,0
β_8	0	0	1	0	— 2,5	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	„	— 2,5	„	„	6,2
γ_9	0	0	1	1	0	„	„	„	„	„	„	„	„	„	1	1	„	1	„	„
	Summe [ ]					+ 3	0	0	+ 1	— 0,2	+ 3	0	+ 1	— 1,1	+ 3	+ 1	+ 1,5	+ 3	0	+ 78
						a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	b_2	c_2	d_2	e_2	c_3	d_3	e_3	d_4	e_4	e_5

eingeführt sind. Es sind nun sonach sämmtliche Coefficienten der Normalgleichungen bekannt. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Formeln (85) — in welchen hier w statt f zu schreiben ist, — und demnächst durch Einsetzen der daraus ermittelten Coefficienten b_2, c_2 etc. in die Formeln (84) — in welchen k_5, k_4 . . . statt δy_b, δx_b . . . zu schreiben ist, — werden die Unbekannten k gefunden und hierauf aus den Correlatengleichungen (91a) die Winkelverbesserungen v in Sekunden.

b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

1) Kommen den Beobachtungen verschiedene Gewichte zu, so ändert das an den Bedingungsgleichungen natürlich nichts, da die Bedingungen dieselben bleiben. Da aber alsdann nicht die Summe [v v], sondern [p v v] zum Minimum zu machen ist, so geht die Gleichung (91) über in

$$0 = p_1 v_1 \, d v_1 + p_2 v_2 \, d v_2 + \ldots .$$

und man kommt durch analoge Entwickelung zu den Correlatengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 k_1}{p_1} + \frac{b_1 k_2}{p_2} + \frac{c_1 k_1}{p_3} + \ldots \\ v_1 &= \frac{a_2 k_1}{p_1} + \frac{b_2 k_2}{p_2} + \frac{c_2 k_3}{p_3} + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

und erhält hieraus die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] + \ldots + w_1 = 0 \\ \left[\frac{b\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] + \ldots + w_2 = 0 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

2) **Der mittlere Fehler** der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \tag{96}$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}},\quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}},\ \text{etc.} \tag{97}$$

3) Beispiel.*) Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$l_1 = 62^0\ 37'\ 24''$ und sei das Gewicht $p_1 = 16$

$l_2 = 48^0\ 47'\ 46''$ „ „ „ „ $p_2 = 25$

$l_3 = 68^0\ 34'\ 35''$ „ „ „ „ $p_3 = 36$

Sa. $179^0\ 59'\ 45''$

$w = -15''$

Die Fehlergleichung lautet: $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0.$

Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16}k_1,\quad v_2 = \frac{1}{25}k_1,\quad v_3 = \frac{1}{36}k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right)k_1 = +15''$$

also $$k_1 = \frac{1500}{13}$$

somit $$v_1 = \frac{1500}{13\,.\,16} = +7{,}2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13\,.\,25} = +4{,}6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13\,.\,36} = +3{,}2''$$

Sa. $+15'' = -w.$

Man erkennt, dass die Verbesserungen v den Gewichten p umgekehrt proportional sind.

III. Trigonometrische Messungen.

A. Dreiecksnetz.

§ 11.

Triangulirung.**)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

**) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschritten sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39—40 Kenntniss zu nehmen.