

Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt III. Trigonometrische Messungen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-79893)

2) Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{b}} \quad (96)$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \quad \text{etc.} \quad (97)$$

3) Beispiel.* Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$l_1 = 62^\circ 37' 24''$ und sei das Gewicht $p_1 = 16$

$l_2 = 48^\circ 47' 46''$ " " " $p_2 = 25$

$l_3 = 68^\circ 34' 35''$ " " " $p_3 = 36$

Sa. $179^\circ 59' 45''$

$w = -15''$

Die Fehlergleichung lautet: $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0$.

Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1, \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1, \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \right) k_1 = +15''$$

$$\text{also } k_1 = \frac{1500}{13}$$

$$\text{somit } v_1 = \frac{1500}{13 \cdot 16} = +7,2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13 \cdot 25} = +4,6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13 \cdot 36} = +3,2''$$

$$\text{Sa. } +15'' = w.$$

Man erkennt, dass die Verbesserungen v den Gewichten p umgekehrt proportional sind.

III. Trigonometrische Messungen.

A. Dreiecksnetz.

§ 11.

Triangulirung.**)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

**) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschriften sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39—40 Kenntniss zu nehmen.

rückzuführen ist, erkennt man sofort, wenn man sich den Punkt D so verschoben denkt, dass er innerhalb des Dreiecks A B C zu liegen kommt), — doch wird man, so weit es sich um Zwecke der niederen Geodäsie handelt, im Allgemeinen diese verhältnissmässig bedeutende Rechenarbeit vermeiden, und zu einem anderen Ausgleichungsverfahren seine Zuflucht nehmen, (vergl. § 17), welches eben die möglichst einfache Gestaltung des Netzes erfordert. Hat man ein solches Netz entworfen, so ist es alsdann leicht, dasselbe durch Einschaltung weiterer Dreieckspunkte nach einer der in den nächsten Paragraphen zu erörternden Methoden nach Belieben zu ergänzen, und grade dieser Umstand macht es möglich, auch da, wo eine sehr dichte Lage der Dreieckspunkte nothwendig erscheint, (vergl. Fig. 30), dem Netze der Hauptdreiecke dennoch eine einfache Gestalt zu geben. Da die Dreiecksseiten des Hauptnetzes (Netz 1. Ordnung), eine beliebig grosse Länge haben können, so wird es häufig möglich sein, das ganze Gebiet mit einem einzigen Dreiecke zu überspannen, und dieses als Hauptdreiecksnetz anzusehen, indessen ist der Form der Fig. 28 der Vorzug zu geben, in welcher auf einer gemeinschaftlichen Basis **zwei** Dreiecke, A B C und A B D, stehen, deren Spitzen C und D durch gegenseitige Visur verbunden sind, wodurch es möglich wird, die Punkte C und D nach § 26 zu behandeln, d. h. ihre infolge der unvermeidlichen Fehler etwas fehlerhafte Lage durch gegenseitige Wechselverbesserungen zu berichtigen. Wo es nicht möglich ist, das ganze Messungsgebiet mit einem so einfachen Netze wenigstens annähernd zu überspannen, wird sich das Dreiecksnetz doch wenigstens aus Theilen von der Form der Fig. 28 oder ähnlicher einfacher Formen zusammensetzen lassen, wie das Hauptdreiecksnetz in Fig. 30.

Die Winkel des Hauptnetzes sind mit möglichster Schärfe zu messen, während die Winkel des Netzes niederer Ordnung, (in Fig. 30 punktiert dargestellt), eine geringere Genauigkeit beanspruchen. Ausser den Winkeln des gesamten Netzes misst man ferner die Neigung irgend einer Dreiecksseite, z. B. A B*) gegen den Meridian, welchen man als Abscissenaxe des Coordinatensystems, für welches später die Coordinaten der Netzpunkte zu berechnen sind, ansieht. Endlich ist noch eine in ebenem Terrain gelegene Dreiecksseite, z. B. C D, (Basis), oder besser mehrere solcher Basen zu messen, worauf alle zur Berechnung des Netzes nöthigen Elemente bekannt sind.

Behufs Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte verschafft man sich nun zunächst einen angenäherten Werth der Seite A F des Hauptnetzes, indem man von der bekannten Basis C D ausgehend nacheinander die Dreiecke C D E, C E A und C A F berechnet. Dass der gefundene Werth für A F wegen der sich häufenden Fehler nur ein angenäherter ist, kümmert uns **vorläufig** nicht.

Ist nun A der Nullpunkt des Coordinatensystems, so sind seine Coordinaten = 0. Die Coordinaten des Punktes F finden wir nach (11)

$$y_F = A F \sin r'_A \text{ und } x_F = A F \cos r'_A$$

somit sind die Coordinaten zweier Punkte des Hauptnetzes bekannt**), worauf die

*) Ist die Neigung einer Strecke A B auf Punkt A gemessen, so bezeichnet man sie mit r'_A , ist sie auf B gemessen, mit r'_B . Beide Neigungen differieren, wie man aus Fig. 30 leicht erkennt, um 180° .

**) Hätte das Hauptnetz die Form der Fig. 29, so würde man die Winkel desselben nach § 17 ausgleichen und sämtliche Dreiecksseiten zu berechnen haben, worauf die Coordinaten der Netzpunkte nach §§ 39—40 gefunden werden können. Wegen der vollständigen Ausgleichung der Winkel des Netzes können Schlussfehler sich nicht ergeben. Der § 41 findet hier somit keine Anwendung.

Punkte C und E, B und G nach § 26 gefunden werden können. Nunmehr wird zur Coordinatenberechnung des Netzes zweiter Ordnung geschritten, welche nach § 18—26 zu erfolgen hat.

Nachdem wir so sämmtliche Coordinaten der Netzpunkte ermittelt, haben wir uns zu erinnern, dass der ganzen Rechnung nur ein **angenäherter** Werth der Basis A F zu Grunde liegt. Wir sind nun aber im Stande, aus den Coordinaten der Endpunkte der gemessenen Basen deren Längen herzuleiten*) und mit den durch direkte Messung gefundenen Werthen derselben zu vergleichen. Seien die **gemessenen** Längen der Basen l_1, l_2, l_3, \dots , die aus den Coordinaten berechneten Längen correspontierend $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, so ist, wenn man das Verhältniss $l_1 : \lambda_1 = q_1, l_2 : \lambda_2 = q_2$ etc. setzt: $l_1 = q_1 \lambda_1, l_2 = q_2 \lambda_2$ etc. Es bedeuten also die Werthe q diejenigen Zahlen, mit welchen man die aus den Coordinaten abgeleiteten Werthe zu multipliciren hat, um die gemessenen, genauerer Werthe l zu erhalten. Man bildet nun aus den einzelnen q das arithmetische Mittel

$$Q = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}$$

welches der Eins natürlich sehr nahe kommen wird, und multiplicirt mit Q die berechneten Coordinaten sämmtlicher trigonometrischen Punkte des Netzes.

§ 12.

Vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke.

In einem Dreiecke sei die Seite a und die Winkel α, β, γ gemessen, die Seiten b und c sind zu berechnen. Wenn nun die gemessenen Grössen kleine Fehler, $d\alpha, d\beta, d\gamma$ enthalten, wie gross sind die Fehler, welche dadurch in den Seiten b und c entstehen?

Es ist $b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$

$$\log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$$
$$\log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$$

also wenn wir differentiiren, nach (37)

$$\frac{d b}{b} = \frac{d a}{a} + \frac{d \sin \beta}{\sin \beta} - \frac{d \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{d c}{c} = \frac{d a}{a} + \frac{d \sin \gamma}{\sin \gamma} - \frac{d \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

oder nach (39): 1) $\frac{d b}{b} = \frac{d a}{a} + d\beta \cot \beta - d\alpha \cot \alpha$

2) $\frac{d c}{c} = \frac{d a}{a} + d\gamma \cot \gamma - d\alpha \cot \alpha.$

Sollen nun die in den einzelnen Dreiecksseiten entstehenden Fehler den Seiten selbst proportional, soll also z. B. $\frac{d b}{b} = \frac{d a}{a}$ sein, so muss nach Gleichung 1) $d\beta \cot \beta - d\alpha \cot \alpha = 0$ werden. Sind die Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen, so dass die Winkelfehler als gleich angenommen werden können, also $d\alpha = \pm d\beta$, so muss demnach $\cot \beta = \pm \cot \alpha$ sein, also entweder $\beta = \alpha$ oder $\beta = 180 - \alpha$. **Beiden**

*) Damit diese Rechnungen möglichst zutreffende Resultate liefern, müssen die Basen zwischen zwei gut bestimmten Punkten gewählt werden.

Bedingungen wird genügt, wenn $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, also $\gamma = 0$ wird. Dieses Resultat ist wichtig bei indirekten Längenmessungen, wenn man eine Länge b durch Messung einer Hülfsbasis a und der Winkel α, β, γ ermitteln will. Man wird die Hülfsbasis so zu legen haben, dass der ihr und der der zu berechnenden Seite gegenüberliegende Winkel möglichst nahe bei 90° liegen. Sollen **beide** Seiten, b und c , berechnet werden, so bleibt nichts übrig, als den Winkel α bei 90° , die Winkel β und γ bei 45° zu nehmen.

Bei Triangulationen, wo man nicht vorher weiß, welche Seite zur Berechnung jedes einzelnen Dreiecks dienen wird, wird man allen Verhältnissen gleichzeitig am besten Rechnung tragen, wenn man sämtliche Dreiecke des Netzes soviel als möglich **gleichseitig** zu machen sucht.

§ 13.

Signale.

Um die trigonometrischen Punkte mit dem Fernrohr des Winkelmessers anvisiren zu können, sind über denselben Signale zu errichten. Eine für die Zwecke der Kleintriangulirung empfehlenswerthe Construktion derselben ist folgende: (Fig. 31). Das Signal wird aus 5—10 cm starken, 5—10 m langen Stangen zusammengesetzt. Fig. 31b zeigt die Verbindung derselben an der Spitze. Aus ca. 30—40 cm langen Stangen wird ein gleichseitiges Dreieck zusammengenagelt. In die Winkel α, β, γ werden die Spitzen der drei Hauptstrebestangen gelegt und durch einen durchgezogenen starken Eisendraht oder mit Nägeln befestigt. In das Dreieck hinein wird die verticale Signalstange geschoben und mit einem Nagel festgenagelt, die Spitze derselben mit einer Flagge versehen, und nun das ganze Signal aufgerichtet, und durch drei Mann über den trigonometrischen Punkt getragen, sodann das untere Ende der Signalstange in der aus Fig. 31a erkenntlichen Weise befestigt, das Signal durch Hin- und Herrücken genau centriert, endlich neben den Fuss jeder Strebe stange ein Pfahl geschlagen, und erstere mit diesem durch Nägel verbunden. Hierdurch wird das Signal ziemlich widerstandsfähig. Die Strebestangen können dann noch durch weitere leichtere Stangen gegenseitig verstrebt werden.

Der trigonometrische Punkt selbst wird durch ein vertical in die Erde versenktes Drainrohr unterirdisch vermarkt, und zur leichten Wiederauffindung dieser Marke von festen Punkten, (Grenzsteinen, Häuserecken und dergl.), aus aufgemessen.

§ 14.

Winkelmessung.

Nachdem sämtliche Signale errichtet sind, wird zur Winkelmessung geschritten. Man unterscheidet Richtungs- und Einzelbeobachtungen. Letztere sind bei Benutzung weniger fein getheilter Instrumente zu empfehlen, während bei besseren Instrumenten die Richtungsbeobachtungen wegen des geringeren Zeitverbrauchs den Vorzug verdienen.

1) **Richtungsbeobachtungen:** Nachdem das Instrument auf dem trigonometrischen Punkte gut centrisch und horizontal aufgestellt worden, wird das Fernrohr auf ein fernes, deutlich sichtbares trigonometrisches Signal scharf eingestellt, die Nonien abgelesen und die Ablesungen in ein geeignetes Formular — (trigon.

Formul. 1 der preussischen Vermessungsanweisung) — eingetragen. Sodann wird die Alhidade, nach Lösung ihrer Bremsschraube, rechts herumgedreht, das Fernrohr auf den folgenden Punkt eingestellt, die Nonien abgelesen etc. In dieser Weise werden nach und nach alle Signale im Kreise herum anvisirt, bis man wieder auf das Anfangssignal gekommen ist, wo man sich durch nochmaliges Ablesen der Nonien von dem unveränderten Stande des Instruments überzeugt. Hierauf wird das Fernrohr durchgeschlagen und die zweite Messung ebenso, jedoch in umgekehrter Reihenfolge der Signale, also durch linkssinnige Drehung der Alhidade, ausgeführt — (wobei die Nonien-Ablesungen in Spalte 6 des trigon. Formul. 1 von unten nach oben notirt werden). — Sobald man wieder auf den Anfangspunkt zurückgekehrt ist, ist die Beobachtung eines Satzes abgeschlossen. In derselben Weise werden die Beobachtungen mehrfach, je nach der erforderlichen Genauigkeit wiederholt, (in der Regel 3 Sätze), wobei man jedoch zu beachten hat, dass zwischen je zwei Satzbeobachtungen der Limbus gegen die Alhidade etwas zu verschieben ist, so dass also dieselben Winkel jedesmal mit einer anderen Stelle der Kreistheilung gemessen werden, damit die Theilungsfehler des Instrumentes möglichst zur Ausgleichung kommen. Die Verschiebung muss, wenn n Sätze beobachtet werden sollen, jedesmal ca. $\frac{180^\circ}{n}$ betragen, vorausgesetzt, dass das Instrument zwei um 180° von einander entfernte Nonien besitzt.

Nach beendeter Winkelmessung erfolgt die Mittelung der Nonienablesungen, und sodann in der Regel die Reduktion auf die Anfangsrichtung, indem von jedem einzelnen Richtungswinkel die Anfangsrichtung abgezogen wird, so dass diese selbst auf 0° reducirt wird, während die Gradzahlen der übrigen Richtungen unmittelbar die Neigungen gegen die Anfangsrichtung angeben.

2) **Einzelbeobachtungen:** Jeder Winkel wird einzeln, und zwar wie folgt gemessen: Man visirt auf das Signal des linken Schenkels, liest die Nonien ab, löst die Bremsschraube der Alhidade, stellt das Fernrohr auf das Signal des rechten Schenkels ein, löst nun die Bremsschraube des Limbus, während die Alhidade mit dem Limbus fest verbunden bleibt, führt Limbus sammt Alhidade zurück, und stellt das Fernrohr wieder auf das linke Signal ein.*). Hierauf löst man wieder die Alhidade, geht auf den rechten Schenkel und wiederholt diese Manipulation so oft, als die beabsichtigte Genauigkeit der Winkelmessung dies erfordert. Schliesslich liest man wieder die Nonien ab. Subtrahirt man die Anfangsablesung von der Schlussablesung, dividirt den erhaltenen Rest durch die Anzahl der Repetitionen, so erhält man den gesuchten Winkel. Um beurtheilen zu können, wie viele Vollkreise der Nonien-Nullpunkt bei der Messung durchlaufen hat, ist es nöthig, nach der ersten Repetition eine Controllablesung an einem Nonius zu machen, welche den **einfachen** Winkel roh angibt. — Die Messung ist nun mit durchgeschlagenem Fernrohr zu wiederholen, doch wird in der zweiten Fernrohrlage nicht **derselbe** Winkel, sondern besser seine Ergänzung zu 360° gemessen, und das gewonnene Resultat von 360° abgezogen. Es geschieht dies, um den Einfluss, welchen eine kleine Drehung des Stativs auf die Winkelmessung ausübt, möglichst auszugleichen.

*) Das Zurückführen des Fernrohrs auf das linke Signal geschieht ebenfalls durch **rechts**sinnige Drehung, damit nicht das vielleicht sich etwas mit drehende Stativ sich wieder zurückdreht, um dann bei der Wiederholung der Messung von Neuem eine schädliche Rechtsdrehung ausführen zu können.

§ 15.

Ausgleichung der Winkelbeobachtungen.

1) **Richtungsbeobachtungen.** Die einzelnen, auf die Anfangsrichtung reducirten Sätze werden (im trigon. Formul. 2 der preussischen Vermessungsanweisung) in der aus Beispiel 1 (vergl. das umstehende Formular), ersichtlichen Weise nebeneinander geschrieben und gemittelt, wobei die Mittel für die Richtungen des Hauptnetzes (§) und die des Netzes 2. Ordnung (§) in der Regel in getrennte Spalten eingetragen werden.

Es kommt bisweilen vor, dass man bei der Beobachtung eines Satzes, z. B. bei plötzlich eintretendem ungünstigen Lichte, ein- oder das andere mal das Signal irgend einer Richtung nicht auffinden kann, so dass in dem betreffenden Satze die betreffende Richtung fehlt, — so im Beispiel Nr. 2 im 3. Satze die Richtung nach § 7, im 4. Satze nach § 11. — In solchen Fällen müssten die durch die Mittelung erhaltenen endgültigen Richtungswinkel in den späteren Berechnungen eigentlich mit verschiedenen Gewichten geführt werden, doch sieht man hiervon in der Regel ab, und wählt statt dessen ein anderes Ausgleichungsverfahren. Man bildet nämlich zunächst in gewöhnlicher Weise die Mittel m_1 aus den Richtungsbeobachtungen der einzelnen Sätze, berechnet sodann die Abweichungen der einzelnen Richtungen r_1 vom Mittel, d. h. man bildet die Differenzen $d = m_1 - r_1$, addirt dieselben satzweise und dividirt sie durch die Anzahl der in den betreffenden Sätzen enthaltenen Beobachtungen. Das so für jeden Satz enthaltene Mittel der Differenzen d , $o = \frac{[d]}{n}$ ist als Durchschnittsabweichung der einzelnen Richtungen r_1 des betreffenden Satzes anzusehen. Es wird nun jede einzelne Richtung r_1 um diesen Durchschnittsfehler des betreffenden Satzes verbessert und die so verbesserten Richtungen $r_2 (= r_1 + o)$ wieder in gewöhnlicher Weise gemittelt. Zeigen diese neuen Mittel m_2 gegen die Mittel m_1 wesentliche Differenzen, — was in unserem Beispiele nicht der Fall, — so wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man die Differenzen $d_2 = m_2 - r_2$ bildet etc., wodurch die Mittel m_3 erhalten werden, welche nun, — wenn nicht eine **nochmalige** Wiederholung nothwendig erscheint, als endgültige Richtungswinkel beibehalten werden.*)

2) **Einzelbeobachtungen.** In dem die Regel bildenden Falle der Fig. 152, — gleiche Anfangsrichtung, — bedarf es keiner besonderen Ausgleichung. Im Falle der Fig. 153 wird man die Winkel α des Hauptnetzes auf 360° , sodann die Winkel $\beta + \gamma$ auf die einzelnen Winkel α auszugleichen haben.

*) Zur weiteren Erläuterung des an sich leicht verständlichen Princips dieses Verfahrens diene noch Folgendes. Gesetzt, man habe drei Sätze beobachtet. Die Richtungen der beiden ersten Sätze seien gegen das Mittel im Durchschnitt zu gross, so müssen die des dritten Satzes naturgemäss zu klein sein. Das Plus der beiden ersten Sätze wird durch das Minus im dritten Satze ausgeglichen. Fehlt nun im dritten Satze die Beobachtung für eine Richtung, so fehlt auch das ausgleichende Minus für dieselbe, das Mittel wird nur aus den beiden ersten Sätzen, also zu hoch erhalten. Dieser Fehler wird beseitigt, wenn die Richtungen in den einzelnen Sätzen um ihre Durchschnittsfehler verbessert, also die der ersten beiden Sätze vermindert werden. Hierdurch wird auch das Mittel für die im dritten Satze fehlende Richtung vermindert, während die Mittel für die **übrigen** Richtungen, wegen der gleichzeitigen Erhöhung der Richtungen des dritten Satzes, nahezu ungeändert bleiben.

Trigon. Formular 2 der preussischen Vermessungs-Anweisung.

Bezeichnung der Punkte	Satz 1			Satz 2			Satz 3			Satz 4			Mittel		Mittel			
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"
Nr. 1 Standpunkt § 9.																		
§ 10	0	00	00	6	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00
§ 14	41	00	58	41	00	30	41	00	58	41	00	45	41	00	48			
§ 8	106	46	00	106	46	20										106	46	10
§ 13	163	48	10	163	47	40	163	48	00	163	47	50	163	47	55			
	35	08		34	30		48	58		48	35		48	43		46	10	
Nr. 2 Standpunkt § 10.																		
1. Richtungen r_1																		
§ 4	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00
§ 7	87	10	40	87	10	32	"	"	"	87	10	18	87	10	30			
§ 8	100	16	00	100	15	50	100	15	50	100	16	43	100	15	51			
§ 11	210	11	55	210	11	35	210	11	30	"	"	"	210	11	40			
§ 13	215	10	25	215	10	20	215	10	20	215	10	15	215	10	20			
	49	00		48	17		37	50		37	16		48	21				
2. Differenzen $d = m_1 - r_1$																		
§ 4	0			0			00			00								
§ 7	—	10		—	2		"			+	12							
§ 8	—	9		+	1		+	1		+	8							
§ 11	—	15		+	5		+	10			"							
§ 13	—	5			00			00		+	5							
[d]	—	39		+	4		+	11		+	25							
$o = \frac{[d]}{n}$	—	8		+	1		+	3		+	6							
3. Richtungen $r_2 = r_1 + o$																		
§ 4	359	59	52	0	00	01	0	00	03	0	00	06	0	00	00			
§ 7	87	10	32	87	10	33	"	"	"	87	10	24	87	10	30			
§ 8	100	15	52	100	15	51	100	15	53	100	16	49	100	15	51			
§ 11	210	11	47	210	11	36	210	11	33	"	"	"	210	11	39			
§ 13	215	10	17	215	10	21	215	10	23	215	10	21	215	10	20			
	48	20		48	22		37	52		37	50		48	20				

§ 16.

Centriren der Winkel.

1) Wenn Kirchthurm spitzen und dergl. als trigonometrische Punkte benutzt werden, so kann man das Instrument nicht centrisch über denselben aufstellen. Man stellt dasselbe dann in einiger Entfernung **neben** das Centrum der Station, z. B. in S, Fig. 32, und beobachtet statt der Richtungen $\alpha_{c_1}, \alpha_{c_2} \dots$ etc. die Richtungen $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \dots$ etc. Um aus letzteren die Richtungen α_c zu erhalten, hat man den Richtungen $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \dots$ etc. bezüglich die Winkel $\delta_1, \delta_2 \dots$ etc. zuzulegen. Es ist also, wie eine durch C zu SP₁ gezogene Parallele sofort erkennen lässt:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{c_1} = \alpha_{s_1} + \delta_1 \\ \alpha_{c_2} = \alpha_{s_2} + \delta_2 \end{array} \right\} \quad (98a)$$

Zur Berechnung der Winkel $\delta_1, \delta_2 \dots$ hat man, wenn e die Excentricität, d. h. die Entfernung CS, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ die Winkel, welche die Verbindende CS mit den Dreiecksseiten SP₁, SP₂ ... einschliesst, und s₁, s₂, s₃ etc. die Längen P₁C, P₂C ... etc. bezeichnen:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \delta_1 = e \frac{\sin \varepsilon_1}{s_1} \\ \sin \delta_2 = e \frac{\sin \varepsilon_2}{s_2} \end{array} \right\} \quad (98)$$

etc.

Die Längen s erhält man genau genug durch eine vorläufige Dreiecksberechnung, z. B. der Dreiecke P₁P₂C etc., in welchen jedesmal nur der Winkel bei C noch unbekannt ist, wenn, wie wir voraussetzen, die Beobachtungen auf sämmtlichen Dreieckspunkten, also auch auf P₁, P₂ ... bereits stattgefunden haben. Der Winkel bei C ergiebt sich dann als Supplement der beiden anderen Winkel. Die Grössen e und ε müssen durch Messung bestimmt werden.

Da die Winkel δ in der Regel sehr klein sind, so kann man statt des $\sin \delta$ den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen δ selbst setzen und hat dann nach (98a) $\delta = e \frac{\sin \varepsilon}{s}$, oder um δ in Sekunden zu erhalten, nach Thl. I, § 32, 1)

$$\delta'' = \varrho'' e \frac{\sin \varepsilon}{s} \quad (99)$$

Nach (47) ist, wenn man alle Glieder, welche x in höherer als der 3. Potenz enthalten, vernachlässigt,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}.$$

Der bei Anwendung der Näherungsformel (99) begangene Fehler ist also gleich $\frac{\delta^3}{6}$. Soll derselbe den Werth 0,5", d. h. in analytischem Masse $\frac{0,5}{\varrho''} = 0,000025$ nicht überschreiten, so ergiebt sich als Grenzwerth für δ

$$\frac{\delta^3}{6} = 0,0000025$$

$$\delta = \sqrt[3]{0,000015} = \frac{1}{41}.$$

^{*)} Es sind dies die im trigon. Formul. 4 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung kommenden Formeln.

Steht die Strecke e senkrecht zur Strecke s , so ist $\frac{e}{s}$ annähernd das analytische Mass für den Winkel δ . Man wird daher die Formel (99) nur anwenden, wenn das Verhältniss $e:s$ den Werth $\frac{1}{41}$ nicht übersteigt, kann dann aber versichert sein, dass im **ungünstigsten** Falle, (wenn nämlich e senkrecht zu s steht), der begangene Fehler nicht den Werth $0,5''$ übersteigt.

2) Die oben entwickelten Formeln finden auch Anwendung, wenn nicht das Instrument auf der Beobachtungsstation, sondern das Signal eines Zielpunktes exzentrisch steht. Hier handelt es sich indessen meistens um sehr geringe Exzentrizität, welche durch schiefen Stand des Signals verursacht wird. Man hat dann die Signalspitze genau auf die Erdoberfläche zu projiciren und kann hierauf am einfachsten wie folgt verfahren: Man trägt die im Centrum der betreffenden Station nach den umliegenden Punkten beobachteten Richtungen mittelst eines Transporteurs auf, Fig. 33, trägt die in ihrer Lage zum Centrum C genau eingemessene projicirte Signalspitze S unter Anwendung eines grossen Massstabs (etwa 1:5) in die Figur ein, fällt von S auf die einzelnen Richtungsstrahlen Lothe, h_1, h_2 etc. und erhält die Winkel $\delta_1, \delta_2, \dots$ in analytischem Massse $= \frac{h_1}{s_1}, \frac{h_2}{s_2}, \dots$, oder wenn h in cm, s in m ausgedrückt ist $= \frac{h_1}{100 s_1}, \frac{h_2}{100 s_2}$, also in Sekunden, wenn man $\frac{g''}{100} = k$ setzt, $= h_1 \frac{k}{s}, h_2 \frac{k}{s}, \dots$, worin die Grössen $\frac{k}{s}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

3) Die Exzentrizität e in den Formeln (98) und (99) wird man in den seltensten Fällen **direkt** messen können. Man misst dann eine Basis, deren Anfangspunkt in S liegt, und deren Endpunkt A heissen möge, und beobachtet die Winkel ASC und SAC , wodurch $SC = e$ bekannt wird. — Liegt S auf der Gallerie eines Thurm, dessen Spitze Stationscentrum ist, so kann man weder eine Basis SA noch den Winkel ASC messen. In diesem und ähnlichen Fällen wählt man eine Basis $AB = g$, Fig. 34, beobachtet von S nach A und B und von A und B nach C und S , dann ist zunächst:

$$\varepsilon = \angle P_o SB - \psi$$

und es kommt nun darauf an, $\angle \psi$ und die Exzentrizität e zu berechnen. Es ist:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) &= \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{a + b}{a - b} \\ a &= g \frac{\sin \gamma_s}{\sin(\beta_s + \gamma_s)} \\ b &= g \frac{\sin \gamma_c}{\sin(\beta_c + \gamma_c)} \end{aligned}$$

oder unter Einführung kürzerer Zeichen:

$$\begin{aligned} a &= g m_s \\ b &= g m_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{daher } \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) &= \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{m_c + m_s}{m_c - m_s} \\ &= \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{\frac{m_c}{m_s} + 1}{\frac{m_c}{m_s} - 1} \end{aligned}$$

oder für $\frac{m_c}{m_s} = \tan \mu$:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) &= \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{\tan \mu + 1}{\tan \mu - 1} \\ &= \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \mu}{\tan \frac{\pi}{4} \tan \mu - 1} \end{aligned}$$

oder $\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cot \left(\frac{\pi}{4} - \mu \right)$. (100)*

Da auch $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} - \beta$ bekannt, so können nunmehr φ und ψ gefunden werden.

Zur Berechnung von $CS = e$ hat man dann:

$$\begin{aligned} e &= \frac{a \sin \beta}{\sin \varphi} \text{ und } e = \frac{b \sin \beta}{\sin \psi} \\ \text{oder } e &= \frac{m_s}{\sin \varphi} g \sin \beta, \text{ und } e = \frac{m_c}{\sin \psi} g \sin \beta. \end{aligned} \quad (101)*$$

§ 17.

Netz-Ausgleichung.

Wir haben im § 10 andeutungsweise die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes nach der Methode der kl. Quadrate behandelt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie werden wir uns indessen mit einer weniger strengen Methode begnügen können, welche hier noch besprochen werden soll. Die Winkel des Netzes Fig. 29 haben, wie wir geschen haben, folgenden Bedingungen zu genügen:

1) in jedem der Dreiecke I—V muss die Summe der drei Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ 180° betragen.

2) die Summe der Winkel β muss 360° betragen.

3) es muss der Gleichung genügt werden

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \dots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 - \log \sin \gamma_2 - \dots - \log \sin \gamma_n = 0.$$

Bezeichnen nun:

- a) $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ die Widersprüche gegen die Bedingungen zu 1)
- b) (1), (2), (3), ... (n) die danach jedem einzelnen Winkel in den Dreiecken I, II, III, ..., n beizulegenden Verbesserungen,
- c) f_s den Fehler der Winkelsumme $[\beta]$ gegen den Sollwerth 360° ,
- d) (s) die danach jedem Winkel β beizulegende Verbesserung, so muss zunächst sein:

$$\begin{aligned} I &\left\{ \begin{array}{l} 3(1) + (s) - f_1 = 0 \\ 3(2) + (s) - f_2 = 0 \\ \vdots \\ 3(n) + (s) - f_n = 0. \end{array} \right. \\ II & n(s) + (1) + (2) + \dots + (n) = 0 \end{aligned}$$

* Die Formeln (100) und (101) kommen im trigon. Formul. 3 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung.

denn auf die Winkel $\beta_1, \beta_2 \dots$ treffen neben den Verbesserungen (s) noch bezüglich die Verbesserungen (1), (2) \dots (n).

Multiplicieren wir Gleichung II mit 3, so erhalten wir:

$$1) 3n(s) + 3[(1) + (2) + \dots + (n)] - 3f_s = 0$$

und durch Addition der Gleichungen I

$$2) 3[(1) + (2) + \dots + (n)] + n(s) - [f] = 0$$

und wenn wir 1) von 2) subtrahiren:

$$\text{also } (s) = \frac{-[f] + 3f_s}{2n} \quad (102)$$

worauf wir für die Verbesserungen (1), (2), (3) \dots (n) aus den Gleichungen I erhalten

$$\left. \begin{array}{l} (1) = \frac{1}{3}(f_1 - (s)) \\ (2) = \frac{1}{3}(f_2 - (s)) \\ \vdots \\ (n) = \frac{1}{3}(f_n - (s)) \end{array} \right\} \quad (103)$$

Von diesen Verbesserungen fallen auf die Winkel β bezüglich die Verbesserungen (1) + (s), (2) + (s) \dots (n) + (s), während die Winkel α und γ im Dreieck I die Verbesserungen (1), im Dreieck II die Verbesserungen (2) etc. erhalten. — Weiter haben nun aber die Winkel α und γ noch der Bedingung 3) zu genügen, wonach:

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \dots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 - \dots - \log \gamma_n = 0.$$

Der gegen diese Bedingung sich ergebende Widerspruch sei φ , die den einzelnen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ zufallende Verbesserung sei v'' , und seien $d\alpha_1, d\alpha_2, \dots, d\gamma_1, d\gamma_2 \dots$ die Aenderungen, welche die Logarithmen der Sinus erleiden, wenn die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ um $1''$ geändert werden, so sind die Aenderungen der Sinus bei einer Aenderung der Winkel um $v'' = d\alpha_1 v''$, $d\alpha_2 v''$ etc., und es muss sein:

$$v''(d\alpha_1 + d\alpha_2 + \dots + d\alpha_n - d\gamma_1 - d\gamma_2 - \dots - d\gamma_n) = \varphi$$

$$\text{also } v'' = \frac{\varphi}{[d]}. \quad (104)$$

Die Coofficienten $d\alpha$ und $d\gamma$ sind aus den Logarithmentafeln als Tafeldifferenz gleichzeitig mit den Logarithmen der Sinus zu entnehmen. Dieselben sind für die Winkel γ mit negativem Vorzeichen einzuführen. Demnach werden auch die Verbesserungen der Winkel γ das **entgegengesetzte** Vorzeichen der den Winkel α zufallenden Verbesserungen erhalten, so dass die durch die Verbesserungen (103) erfüllten Bedingungen zu 1) durch die neuen Verbesserungen v nicht gestört werden, ebensowenig wie die durch (102) erfüllte Bedingung zu 2), da die Winkel β durch die Verbesserungen v überhaupt nicht berührt werden.

Hat man v berechnet, so ergeben sich die Verbesserungen der Logarithmen der Sinus gleich $v d\alpha_1, v d\alpha_2 \dots$ etc. Diese Logarithmen brauchen also für die verbesserten Winkel zum Zwecke der nunmehr erfolgenden Berechnung der Dreiecksseiten nicht nochmals aufgeschlagen zu werden.

Auf den Fall der Fig. 28 lassen sich, wie bereits im § 11 angedeutet wurde, dieselben Formeln anwenden, doch verdient für diesen Fall das Verfahren des § 26 den Vorzug.

B. Trigonometrische Punkteinschaltung.

§ 18.

Methoden der Punktbestimmung.

Die trigonometrische Punktbestimmung durch Punkteinschaltung setzt voraus, dass bereits andere trigonometrische Punkte, welche als **gegebene** Punkte bezeichnet werden, ihrer Lage nach, also durch ihre Coordinaten bekannt seien. Soll ein neuer Punkt in das Netz der gegebenen Punkte eingeschaltet werden, so geschieht dies nach einer der folgenden Methoden:

a) **Vorwärtseinschneiden:** Die Bestimmung erfolgt lediglich durch Winkelmessung auf **gegebenen** Punkten, und zwar werden auf diesen die Richtungen nach den neuzubestimmenden Punkten hin, sowie auch solche nach anderen gegebenen Punkten beobachtet. Diesen Fall stellt Fig. 35 dar, in welcher § 5 den neu zu bestimmenden Punkt bezeichnet. Dass einzelne der in dieser Figur dargestellten Richtungen, z. B. § 3—§ 4, zur Hälfte punktiert, zur Hälfte voll ausgezogen sind, bedeutet, dass diese Richtungen nur **einseitig** beobachtet wurden, d. h. es ist z. B. auf § 3 die Richtung nach § 4, nicht aber umgekehrt auf § 4 die Richtung nach § 3 beobachtet. Danach lehrt ein Blick auf die Figur, dass auf dem neu zu bestimmenden Punkte überhaupt keine Beobachtungen ausgeführt sind.

Man erkennt nun sofort, dass zur Bestimmung des Punktes § 5 die Beobachtungen auf 2 gegebenen Punkten genügen würden, z. B. die Beobachtungen auf § 1 und § 2, denn es sind dadurch die Richtungen § 1—§ 5 und § 2—§ 5, also 2 geometrische Oerter für § 5 bekannt, allein, man hat durch blosse Messung der beiden Winkel an der Basis § 1—§ 2 des Dreiecks § 1 § 5 § 2 weder eine Controlle für die Winkelmessung, noch für die richtige Bestimmung der beiden **gegebenen** Punkte. Fehler in diesen Bestimmungselementen stellen sich erst durch Beobachtung **überschüssiger** Richtungen heraus, wie sie die Figur nachweist.

Weitere überschüssige Richtungen würde man erhalten haben, wenn man auch auf § 5 die Richtungen nach gegebenen Punkten hin*) gemessen hätte. Um diesen Fall des **combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens** in unserer Figur darzustellen, würden wir die auf § 5 beobachteten Richtungen **voll** auszuziehen haben.

b) **Rückwärtseinschneiden.** Es werden nur auf dem zu bestimmenden Punkte § 5, Fig. 36, die Richtungen nach gegebenen Punkten beobachtet. Hätte man nur **zwei** Richtungen, z. B. § 5—§ 1 und § 5—§ 2, d. h. den Winkel α gemessen, so hätte man erst **einen** geometrischen Ort für § 5, nämlich die Peripherie des den Winkel α als Peripheriewinkel umfassenden durch § 1 und § 2 gelegten Kreises. Man braucht also zur Bestimmung von § 5 noch mindestens eine 3te Richtung. Im Falle unserer Figur ist also nur **eine** überschüssige, fehleraufklärende und eine Ausgleichung derselben ermöglichte Beobachtung vorhanden.

c) **Combinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.** Die Beobachtung erfolgt sowohl auf den gegebenen, als auch auf dem zu bestimmenden Punkte. — Vergl. den Schluss zu a).

Weitere Methoden, durch welche mehrere Punkte **gleichzeitig** eingeschaltet werden, die aber bezüglich der Güte der zu erzielenden Resultate den oben er-

*) Sogen. Rückwärtsrichtungen, im Gegensatz zu den auf den **gegebenen** Punkten beobachteten Vorwärtsrichtungen.

läuterten Methoden nachstehen, das sogen. **Einschalten** und **Einketten**, werden wir in den Paragraphen 28 und 29 kennen lernen.

§ 19.

Berechnung der Neigungen.*)

Unter der **Neigung** einer trigonometrischen Linie verstehen wir denjenigen Winkel, welchen diese Linie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, und zwar von dieser aus **rechts** herum zählend. Die Neigung einer Linie, $P_a P_b$, Fig. 37, kann in P_a oder in P_b gemessen sein, und wird im Folgenden im ersten Falle mit r_a^b , im letzteren Falle mit r_b^a bezeichnet. Es leuchtet ein, dass beide Neigungen um 180° verschieden sind.

Wendet man bei trigonometrischer Punkteinschaltung die Methode des Vorwärts- oder des combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens an, so ist, wie wir später sehen werden, (§ 20), die Kenntniss der Neigungen aller derjenigen Linien zwischen **gegebenen** Punkten erforderlich, für welche Richtungsbeobachtungen vorliegen. Diese müssen also vorher abgeleitet werden.

Sind y_a und x_a , y_b und x_b die Coordinaten der Punkte P_a und P_b , Fig. 37, und setzt man $y_b - y_a = \Delta y$, $x_b - x_a = \Delta x$, so ist

$$\tan r_a^b = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (105)$$

Zur Controlle bestimmt man die Neigung noch aus einer zweiten Formel. Bekanntlich ist:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \text{also} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + r\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan r}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan r} = \frac{1 + \tan r}{1 - \tan r} \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} + r\right) &= \frac{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}. \end{aligned} \quad (106)$$

§ 20.

Orientirung der beobachteten Richtungen.

Sind die Neigungen r der trigonometrischen Linien zwischen den **gegebenen** Punkten nach vorigem § ermittelt, so lassen sich aus diesen und den nach neu zu bestimmenden Punkten ausgeführten Richtungsbeobachtungen die noch unbekannten Neigungen φ derjenigen trigonometrischen Linien bestimmen, welche die **gegebenen** Punkte mit den **zu bestimmenden** Punkten verbinden.

Sind auf dem Punkte P , Fig. 38, die Richtungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nach den **gegebenen** Punkten P_1, P_2, P_3 , und die Richtung α_4 nach dem neu zu bestimmenden

*^o) Trigonom. Formul. 8 der pr. Verm.-Anw.

Punkte P_4 beobachtet, so findet man die Neigung φ_4 der trigonometrischen Linie $P - P_4$

$$\varphi_4 = o_0 + \alpha_4 \quad (107)$$

worin o_0 , (Orientierungswinkel), die Neigung der Nullrichtung, (Anfangsrichtung), α_0 bezeichnet. Man findet:

$$\left. \begin{array}{l} o_0 = r_1 - \alpha_1 \\ o_0 = r_2 - \alpha_2 \\ o_0 = r_3 - \alpha_3 \\ \vdots \\ o_0 = r_n - \alpha_n \end{array} \right\} \quad (108)$$

Wegen der Fehler der Neigungen r und der Beobachtungen α werden die aus den Gleichungen (108) ermittelten Werthe für o_0 nicht genau übereinstimmen, und wird daher das arithmetische Mittel

$$o_0 = \frac{r_1 - \alpha_1 + r_2 - \alpha_2 + \dots + r_n - \alpha_n}{n} \quad (109)$$

in die Gleichung (107) zur Berechnung der Neigung φ_4 eingeführt.

Addirt man zum Orientierungswinkel o_0 analog (107) der Reihe nach auch die beobachteten Richtungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$, (d. i. die auf P nach den **gegebenen** Punkten beobachteten Richtungen), so werden dadurch die Beobachtungen α nach den **gegebenen** Neigungen r orientirt, man erhält die **orientirten** Richtungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$, welche indessen wegen der Fehler der Beobachtungen α etwas von den correspondierenden **gegebenen** Neigungen $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ abweichen werden. Bildet man die Differenzen $v_1 = r_1 - \varphi_1, v_2 = r_2 - \varphi_2$ etc., so gewinnt man ein Urtheil über die Genauigkeit der Beobachtungen α . Man erkennt leicht, dass die Summe der Fehler v , — analog (63) —, $= 0$ werden muss, bis auf kleine in der Abrundung begründete Differenzen. Hierin ist eine Probe für die richtige Berechnung des Orientierungswinkels etc. gegeben.

Ein Beispiel für diese Rechnungen giebt die nachstehende Tabelle — trigon. Formul. 5 der preussischen Verm.-Anw., — in welcher § 4 und § 10 **neu** zu bestimmende Punkte sind. Die Neigungen der Linien zwischen dem gegebenen Beobachtungspunkte § 6 einerseits und den weiteren **gegebenen** Punkten 1, 5, 8, 9 andererseits werden in Spalte 2 des Formulars eingetragen. Nach diesen werden die Beobachtungen α nach **Anleitung** der obigen Formeln*) orientirt und die **orientirten** Richtungen in Spalte 5 eingetragen, aus welcher sie zu den späteren Rechnungen entnommen werden.

Sobald man durch die nunmehr vorzunehmenden trigonometrischen Rechnungen, welche in den folgenden Paragraphen behandelt werden, die Coordinaten für die neu zu bestimmenden Punkte ermittelt hat, wird man auch die endgültigen Neigungen r der diese Punkte mit dem Beobachtungspunkte § 6 verbindenden Linien nach den Formeln (105) und (106) berechnen können, welche von den aus Spalte 5 entnommenen und zur Berechnung benutzten Neigungen φ , wegen der Verbesserungen, welche die letzteren Neigungen durch die Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kl. Quadrate erhalten, etwas abweichen werden.

*) Vergl. den Vordruck im Kopfe des Formulars.

Trigonometr. Formular 5.

Ziel-Punkte	Neigungen r	Beobachtete Richtungen α	Unterschiede $r - \alpha$		Orientierte Richtungen $\varphi = \alpha + \theta_0$	Ver- besse- rungen $v = r - \varphi$	Bemerkungen
			$\theta_0 = \frac{[r - \alpha]}{n}$	$\circ ' ''$			
1	2	3	4	5	6	7	
Standpunkt $\hat{\alpha} 6$.							
$\hat{\alpha} 1$	147 42 37	0 00 00	147 42 37	147 42 50		13	$[a] = 03' 42''$
$\hat{\alpha} 4$		9 26 44		157 09 34			$n \theta_0 = 17' 00''$
$\hat{\alpha} 5$	182 46 47	35 04 02	147 42 45	182 46 52		5	$[\varphi] = 20' 42''$
$\hat{\alpha} 8$	198 46 21	51 03 14	147 43 07	198 46 04 17			
$\hat{\alpha} 10$		100 10 35		247 53 25			
$\hat{\alpha} 9$	273 01 57	125 19 07	147 42 50	273 01 57 0			
		03 42	171 19		20 42	17 18	
		$\theta_0 = \frac{[r - \alpha]}{n}$	147 42 50				

Diese endgültigen Neigungen wird man dann ebenfalls in Spalte 2 eintragen — (an den bisher leer gebliebenen Stellen bei $\hat{\alpha} 4$ und $\hat{\alpha} 10$) — wird die Differenzen v gegen die in Spalte 5 eingetragenen Neigungen, (orientirten Richtungen φ), bilden und so ein Urtheil über die Genauigkeit der aus den Beobachtungen α hervorgegangenen, zur Berechnung der Coordinaten benutzten Neigungen φ gewinnen. Nach der pr. Verm.-Anw. darf die Differenz $v = r - \varphi$ für Punkte IV. Ordnung nicht den Betrag $25''$, für Beipunkte nicht den Betrag $35''$ überschreiten.

Wie hier die auf $\hat{\alpha} 6$ beobachteten Richtungen, sind natürlich, ehe die weiteren trigonometrischen Rechnungen vorgenommen werden können, die auf sämtlichen gegebenen Punkten beobachteten Richtungen zu orientiren. Sobald dann ein neu bestimmter Punkt berechnet ist, kann derselbe für die Bestimmung weiterer Punkte als gegebener Punkt benutzt werden und sind zu dem Ende die auf demselben ausgeführten Beobachtungen sofort in gleicher Weise zu orientiren.

§ 21.

Vorwärtseinschneiden.

Nachdem alle Richtungen, welche auf gegebenen Punkten nach einem neu zu bestimmenden Punkte hin beobachtet sind, in der im vor. § angegebenen Weise orientirt worden, nachdem also sämtliche von gegebenen Punkten aus nach dem zu bestimmenden Punkte hin ausgehenden Strahlen bezüglich ihrer Neigungen φ gegen die Abscissenaxe bekannt sind, kann zur Coordinatenberechnung geschritten werden. Gemäss § 9, 2) erfolgt zunächst die

Berechnung der genäherten Coordinaten y und x .*

Man wählt zu dem Ende unter den vorhandenen Beobachtungen zwei von den gegebenen Punkten P_a und P_b , Fig. 39, nach dem gesuchten Punkte P ausgehende Strahlen aus, welche sich in P möglichst annähernd rechtwinklig schneiden**),

* In Abthl. I des trigon. Formulars 10 der pr. Verm.-Anw.

**) Wegen § 12.

und entnimmt deren Neigungen φ_a und φ_b aus Spalte 5 des im vor. § dargestellten Formulars. Die Winkel δ_a , δ_b und δ des Dreiecks $P_a P_b P$ ergeben sich aus den bekannten Neigungen, wie die Figur ergibt:

$$\delta_a = \varphi_a - r_a^b, \quad \delta_b = \varphi_a - \varphi_b \pm 180^\circ, \quad \delta = \varphi_b - \varphi_a. \quad (110)$$

Es ist nun, wenn man die Coordinaten der gegebenen Punkte P_a und P_b mit y_a , x_a , y_b , x_b bezeichnet, im übrigen aber die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$a = s \frac{\sin \delta_a}{\sin \delta} = \frac{y_b - y_a}{\sin r_a^b} \cdot \frac{\sin \delta_a}{\sin \delta}$$

$$\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{y_b - y_a}{\sin \delta \sin r_a^b}$$

und analog auch

$$\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{x_b - x_a}{\sin \delta \cos r_a^b}$$

$$\text{Setzt man } \frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{b}{\sin \delta_b} = m \quad (111)$$

$$\text{so ist } m = \frac{y_b - y_a}{\sin \delta \sin r_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\sin \delta \cos r_a^b}. \quad (111a)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \Delta y_a &= a \sin \varphi_a & \Delta x_a &= a \cos \varphi_a \\ \Delta y_a &= b \sin \varphi_b & \Delta x_b &= b \cos \varphi_b \end{aligned}$$

also nach (111)

$$\begin{aligned} \Delta y_a &= m \sin \delta_a \sin \varphi_a & \Delta x_a &= m \sin \delta_a \cos \varphi_a \\ \Delta y_a &= m \sin \delta_b \sin \varphi_b & \Delta x_a &= m \sin \delta_b \cos \varphi_b \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (112)$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{y} &= y_a + \Delta y_a & \mathfrak{x} &= x_a + \Delta x_a \\ &= y_b + \Delta y_b & &= x_b + \Delta x_b \end{aligned} \quad (113)$$

Aufstellung der Fehlergleichungen: Wir haben nun weiter mit Hülfe der genäherten Werthe \mathfrak{y} und \mathfrak{x} die genäherten Neigungen n abzuleiten, — vergl. § 9, 2) — und mit den beobachteten Neigungen φ zu vergleichen, und benutzen dazu die Formel (105)

$$\tan n = \frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta \mathfrak{x}} \quad (114)$$

worin $\Delta \mathfrak{y} = y - \mathfrak{y}$, $\Delta x = x - \mathfrak{x}$. Diese Formel liefert uns die Neigungen $n_{P_1}^{P_1}$, $n_{P_2}^{P_2}$ etc., welche, um mit den Neigungen $\varphi_{P_1}^P$, $\varphi_{P_2}^P$ etc. verglichen werden zu können, um 180° zu ändern sind. Wir erhalten somit, — vergl. (75) — :

$$\begin{aligned} f_1 &= n_1 - (\varphi_1 \pm \pi) \\ f_2 &= n_2 - (\varphi_2 \pm \pi) \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (115)$$

Es kommt nun weiter darauf an, den Punkt P durch Änderung seiner Coordinaten \mathfrak{y} und \mathfrak{x} so zu verschieben, dass, wenn wir die Werthe, welche die Neigungen n durch diese Verbesserung gemäss (114) erhalten, mit r bezeichnen, und

$$\begin{aligned} r_1 - (\varphi_1 \pm \pi) &= v_1 \\ r_2 - (\varphi_2 \pm \pi) &= v_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

setzen, die Summe der Quadrate der einzelnen v zum Minimum wird. Bezeichnen wir die uns noch unbekannten Coordinatenverbesserungen, durch welche dieser Bedingung genügt wird, mit δy und δz , die durch diese Verbesserungen in den einzelnen Neigungen n hervorgebrachten Aenderungen mit δn , so ist gemäss (76)

$$\left. \begin{array}{l} \delta n_1 = a_1 \delta z + b_1 \delta y \\ \delta n_2 = a_2 \delta z + b_2 \delta y \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (116)$$

worin a und b die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\tan n = \frac{\Delta y}{\Delta z}$ nach Δy und Δz bezeichnen. Indem wir diese Differentiation (nach (24) und (25)) ausführen und die partiellen Differentiale nach (29) addiren, erhalten wir:

$$d \tan n = -\frac{\Delta y}{\Delta z^2} d(\Delta z) + \frac{d(\Delta y)}{\Delta z}$$

da $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, worin y und z , also die Coordinaten der gegebenen Punkte, Constante, und nur y und z veränderlich sind, so ist $d(\Delta y) = -\delta y$, $d(\Delta z) = -\delta z$, und wir erhalten somit nach (41):

$$\frac{\delta n}{\cos^2 n} = \frac{\Delta y}{\Delta z^2} \cdot \delta z - \frac{1}{\Delta z} \cdot \delta y$$

$$\delta n = \frac{\Delta y \cos^2 n \delta z}{\Delta z^2} - \frac{\cos^2 n}{\Delta z} \delta y.$$

Bezeichnen nun s_1, s_2, \dots die Entferungen des Punktes P von den gegebenen Punkten P_1, P_2, \dots , so ist: $\cos n = \frac{\Delta z}{s}$, also $\frac{\cos n}{\Delta z} = \frac{1}{s}$, und ferner

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \tan n = \frac{\sin n}{\cos n}, \text{ also}$$

$$\delta n = \frac{1}{s} \sin n \delta z - \frac{1}{s} \cos n \delta y$$

wodurch wir δn in analytischem Winkelmasse erhalten. In Sekunden ausgedrückt ist also:

$$\delta n = \varrho'' \frac{\sin n}{s} \delta z - \varrho'' \frac{\cos n}{s} \delta y.$$

Demnach ist in (116)

$$a = \varrho'' \frac{\sin n}{s}, \quad b = -\varrho'' \frac{\cos n}{s} \quad *) \quad (117)$$

*) Ein anderer Ausdruck für a und b ergibt sich wie folgt: Da $a \delta x$ die in Sekunden ausgedrückte Aenderung der Neigung n vorstellt, welche durch Aenderung von Δz um den Betrag δx entsteht, so ist a nichts Anderes, als die Aenderung von n , welche einer Aenderung von Δz um 1 (1 m) entspricht. Durch partielle Differentiation der Gleichung $\log \tan n = \log \Delta y - \log \Delta z$ nach Δz erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen unbedacht lassen, $d \log \tan n = d \log \Delta z$. Ist nun die Aenderung von $\Delta z = 1$, so kann die zugehörige Aenderung von $\log \Delta z$, (also $d \log \Delta z$) durch Bildung der Tafeldifferenz erhalten werden. Sie sei $= D_x$. Bezeichnet ferner $D_{\tan n}$ die Tafeldifferenz des $\log \tan n$ für 1", so ist die Aenderung des $\log \tan n$ für $a'' = a D_{\tan n}$, und es ist nach Obigen: $a D_{\tan n} = D_x$, also $a = \frac{D_x}{D_{\tan n}}$. Analog findet man $b = \frac{D_y}{D_{\tan n}}$. Es erhält nun, wie aus (117) erhellten wird, a das Vorzeichen von Δy , b das umgekehrte Vorzeichen von Δz .

Graphisch kann man a und b wie folgt finden: Man trägt die Punkte P und P_1 mittelst ihrer Coordinaten y und y_1 , z und z_1 auf, ermittelt nach der Zeichnung die Länge s , ändert nun die Abscisse z um 1, fällt von dem so erhaltenen Punkte ein Loth $= h_x$ auf den Strahl s , so ist $\frac{h_x}{s} \varrho'' = a$. Entsprechend

Die geänderten Neigungen $r = n + \delta n$ sind nun nach (116)

$$r = n + a \delta \varphi + b \delta \eta. \quad (118)$$

Vergleichen wir diese endgültigen Neigungen nach Anleitung des § 9 mit den beobachteten Neigungen φ , so kommen die Verbesserungen v zum Vorschein. Wir erhalten die Fehlerequationen (77):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_1 \delta \varphi + b_1 \delta \eta + f_1 \\ v_2 &= a_2 \delta \varphi + b_2 \delta \eta + f_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

durch welche wir durch die Minimumsbedingung $[vv] = \text{minim.}$ zu den Normalgleichungen (79) gelangen, aus denen sich $\delta \eta$ und $\delta \varphi$ nach § 9, 3) ergeben.

Neben den aus Gl. (82) und (83) sich ergebenden Rechenproben verschaffen wir uns eine weitere, die gesammten Ausgleichsrechnungen controllirende Probe, indem wir mit Hilfe der endgültigen Coordinaten $\eta + \delta \eta$, $x + \delta \varphi$ die Neigungen r ableiten und die Verbesserungen $v = r - (\varphi \pm \pi)$ bilden, welche mit den aus (119) berechneten Werthen v übereinstimmen müssen.*)

Der mittlere Fehler der Beobachtungen ist nach (87)

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}.$$

§ 22.

Rückwärtseinschneiden.**)

Sind zur Beobachtung eines Punktes nur Beobachtungen auf diesem Punkte selbst ausgeführt, so erfolgt die Berechnung der genäherten Coordinaten nach folgenden Formeln:

Gegeben seien die Punkte P_a , P_m , P_b , Fig. 40, gesucht der Punkt P , auf welchem die Richtungen nach den gegebenen Punkten, also die Winkel α und β gemessen sind. Wir finden zunächst die Neigungen r_a^m und r_b^m auf bekannte Weise nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \tan r_a^m &= \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \\ \tan r_b^m &= \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

sowie die Längen a und b nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{y_m - y_a}{\sin r_a^m} = \frac{x_m - x_a}{\cos r_a^m} \\ b &= \frac{y_m - y_b}{\sin r_b^m} = \frac{x_m - x_b}{\cos r_b^m} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

erhält man durch Änderung der Ordinate η um 1, und durch Fällen des Lothes $h_y : \frac{h_y}{s} \varrho'' = b$. Die Änderungen der Coordinaten y und φ um 1 m müssen in grossem, das Abgreifen von Centimetern gestattenden Massstab ausgeführt werden. Sind h_x und h_y in cm, s in Metern ausgedrückt, und setzt man $\frac{\varrho''}{100} = k$, so ist $a = h_x \frac{k}{s}$, $b = h_y \frac{k}{s}$, worin $\frac{k}{s}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

*) Nach der pr. Verm.-Anw. erhalten die aus (119) gebildeten Werthe die Bezeichnung u . Die Probe lautet dann: u soll $= v$ sein.

**) Trigon. Formul. 11 der preussischen Verm.-Anw.

Ferner kennen wir:

$$\gamma + \delta = r_a^m = r_b^m. \quad (122)$$

Setzen wir $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\sigma$, so ist:

$$\varphi + \psi = \pi - \sigma \quad (123)$$

und es kommt uns nun zunächst darauf an, $\varphi - \psi$ zu berechnen, um mit Hilfe von (123) zu den einzelnen Winkeln φ und ψ zu gelangen. — Nach dem Sinussatz ist:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{s_m \sin \alpha}{a} \\ \sin \psi &= \frac{s_m \sin \beta}{b} \end{aligned} \right\} \quad (123a)$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} &= \frac{\frac{s_m \sin \alpha}{a} + \frac{s_m \sin \beta}{b}}{\frac{s_m \sin \alpha}{a} - \frac{s_m \sin \beta}{b}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{a} + \frac{\sin \beta}{b}}{\frac{\sin \alpha}{a} - \frac{\sin \beta}{b}} \\ &= \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir nach einer bekannten goniometrischen Formel, wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch $b \sin \alpha$ dividieren:

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{1 + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 - \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}$$

oder wenn wir $\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \tan \mu$ (124)

setzen: $\tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cot \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{1 + \tan \mu}{1 - \tan \mu}$

$$\cot \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)}{\tan \frac{\varphi + \psi}{2}}$$

oder auch $\tan \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{\tan \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)}$

oder $\tan \frac{\varphi - \psi}{2} = \tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)$. (125)

Als Rechenprobe ergibt sich aus (123a)

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}. \quad (126)$$

Endlich ist nun:

$$\triangle y_a = s_a \sin r_a$$

oder wenn wir s_a durch den Sinussatz ausdrücken:

$$\Delta y_a = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \sin r_a$$

und analog

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x_a = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \cos r_a \\ \Delta y_b = \frac{b \sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta} \sin r_b \\ \Delta x_b = \frac{b \sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta} \cos r_b \end{array} \right\} \quad (126a)$$

Die Lage des Punktes P bleibt unbestimmt, wenn derselbe in der Peripherie des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises liegt, in welchem Falle α und β Peripheriewinkel dieses Kreises werden, daher für jeden beliebigen Punkt in der Peripherie gleich bleiben. Hierauf hat man bei der Auswahl der drei zur Berechnung der genäherten Coordinaten zu benutzenden gegebenen Punkte zu achten.

Aufstellung der Fehlgleichungen: Wir berechnen zunächst mit Hilfe der genäherten Coordinaten, welche sich analog (113) aus den Formeln (126) ergeben, die genäherten Neigungen $n_1, n_2 \dots$ nach (114). Ziehen wir von jeder einzelnen der Neigungen $n_1, n_2 \dots$ den Winkel $o_0 = n_1 - \alpha_1$ ^{*)} ab, so erhalten wir die Werthe:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = n_1 - (n_1 - \alpha_1) = n_1 - o_0 = \alpha_1 \\ w_2 = n_2 - (n_1 - \alpha_1) = n_2 - o_0 \\ \vdots \\ w_n = n_n - (n_1 - \alpha_1) = n_n - o_0 \end{array} \right\} \quad (127)$$

Die Werthe w müssten nun, wenn sowohl die genäherten Neigungen n als die Beobachtungen α fehlerlos wären, mit den Beobachtungen α übereinstimmen, wie sofort aus Fig. 38 klar wird, wenn man sich in dieser die Bezeichnungen $n_1, n_2 \dots$ statt $r_1, r_2 \dots$ geschrieben denkt. In Wahrheit ergeben sich aber die Widersprüche:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = w_1 - \alpha_1 \\ f_2 = w_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ f_n = w_n - \alpha_n \end{array} \right\} \quad (128)$$

und es kommt nun darauf an, die genäherten Coordinaten y und x um die kleinen Beträge dy und dx so zu verbessern, dass die Summe der Quadrate der dann noch übrig bleibenden Widersprüche, welche wir jetzt mit v bezeichnen, ein Minimum werde.

Durch die Änderungen der Coordinaten um dy und dx werden sich die Neigungen n um dn ändern, und es ist

$$dn = a dx + b dy$$

worin a und b nach Formel (117) zu berechnen sind. Die endgültigen Neigungen r ergeben sich somit:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = n_1 + a_1 dx + b_1 dy \\ r_2 = n_2 + a_2 dx + b_2 dy \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (129)$$

^{*)} Sind die Beobachtungen α auf die Anfangsrichtung reducirt, ist also $\alpha_1 = 0$, so ist $o_0 = n_1$.

Hieraus erhalten wir, indem wir wieder von den Neigungen v den Winkel $o'_0 = v_1 - a_1$ abziehen, die Werthe:

$$\left. \begin{array}{l} n_1 + a_1 d x + b_1 d y - o'_0 = w'_1 \\ n_2 - a_2 d x + b_2 d y - o'_0 = w'_2 \end{array} \right\} \quad (130)$$

etc.

die nun noch übrig bleibenden Fehler sind analog (128)

$$\begin{aligned} v_1 &= w'_1 - a_1 \\ v_2 &= w'_2 - a_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder nach (130), wenn wir das uns noch unbekannte $o'_0 = o_0 - z^*$ setzen:

$$\begin{aligned} v_1 &= n_1 + a_1 d x + b_1 d y - o_0 + z - a_1 \\ v_2 &= n_2 + a_2 d x + b_2 d y - o_0 + z - a_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder da nach (127) $n_1 - o_0 = w_1$ und nach (128) $w_1 - a_1 = f_1$, also $n_1 - o_0 - a_1 = f_1$ und analog $n_2 - o_0 - a_2 = f_2$ etc.:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = f_1 + z + a_1 d x + b_1 d y \\ v_2 = f_2 + z + a_2 d x + b_2 d y \end{array} \right\} \quad (131)$$

etc.

Um z zu eliminieren, bilden wir aus diesen Gleichungen das arithmetische Mittel:

$$\frac{[v]}{n} = \frac{[f]}{n} + z + \frac{[a]}{n} d x + \frac{[b]}{n} d y$$

welches wir mit einfacheren Zeichen schreiben wollen:

$$v_m = f_m + z + a_m d x + b_m d y.$$

Ziehen wir diese Gleichung von den einzelnen Fehlergleichungen (131) ab, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} v_1 - v_m = f_1 - f_m + (a_1 - a_m) d x + (b_1 - b_m) d y \\ v_2 - v_m = f_2 - f_m + (a_2 - a_m) d x + (b_2 - b_m) d y \end{array} \right\} \quad \text{etc.} \quad (131a)$$

welche Gleichungen wir, um wieder auf die Form der Gleichungen (77) zu gelangen, unter Einführung einfacherer Zeichen schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = f_1 + a_1 d x + b_1 d y \\ v_2 = f_2 + a_2 d x + b_2 d y \end{array} \right\} \quad (132)$$

etc.

Die Bedingung $[v v] = \text{minim.}$ führt uns dann wieder zu den Normalgleichungen (79), deren Auflösung nach § 9, 3) erfolgt.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen ergibt sich nach (87), da drei Beobachtungen zu einer einmaligen Bestimmung des Punktes P gehören:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-3}}.$$

*) Statt $o'_0 = v_1 - a_1$ zu bilden, könnte man auch $o'_0 = v_2 - a_2$, oder $o'_0 = v_3 - a_3$ etc. bilden. Alle diese Werthe für den Orientierungswinkel o_0 werden etwas differieren und wir müssten eigentlich das arithmetische Mittel o_m statt o'_0 einsetzen. Indem wir $o'_0 = o_0 - z$ statt $o_m = o_0 - z$ setzen, stellen wir in z zugleich den Fehler des Orientierungswinkels o'_0 dar. Die uns noch Unbekannte z ist nun zu eliminieren, wie dies in Folgendem geschieht.

**) Die Bildung der Mittel a_m , b_m , f_m und der Werthe $a - a_m$, $b - b_m$, $f - f_m$ erfolgt in Abth. 3 des trigon. Formul. II der pr. Verm.-Anw. Als Rechenprobe hat man gemäß (63) $[a - a_m] = 0$, $[b - b_m] = 0$, $[f - f_m] = 0$.

Als **Rechenprobe** leiten wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\eta + d\eta$, $\xi + d\xi$ die endgültigen Neigungen r ab, bilden die Grössen $v_1 = (r_1 - o_0) - a_1$, $v_2 = (r_2 - o_0) - a_2$ etc., ziehen das Mittel $\frac{[v]}{n} = v_m$ von den einzelnen Grössen v ab*), so müssen die so erhaltenen Werthe mit den aus (132) sich ergebenden Werthen v übereinstimmen.

§ 23.

Das combinirte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21, die der genäherten Neigungen n und der Werthe a und b nach (114) bis (117). Die Fehlergleichungen für die Vorwärtsbeobachtungen werden nach § 21, für die Rückwärtbeobachtungen nach § 22 angesetzt, d. h. es werden für die Rückwärtbeobachtungen die Grössen a , b und f um ihre arithmetischen Mittel a_m , b_m , f_m gekürzt, dann aber die Quadrate $a_1 a_1$, $a_2 a_2 \dots$, $b_1 b_1$, $b_2 b_2 \dots$, und die Produkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \dots$, $a_1 f_1$, $a_2 f_2 \dots$, $b_1 f_1$, $b_2 f_2 \dots$ für die Rückwärt- und Vorwärtsrichtungen je in einer Summe vereinigt, um die Coofficienten der Normalgleichungen $[a a]$, $[b b]$ etc. zu erhalten.

§ 24.

Einschneiden mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.)**

1) Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21. Sind Rückwärtssrichtungen vorhanden, so werden diese nach den Vorwärtsrichtungen orientirt, welche Rechnungsoperation ganz nach dem Beispiel des § 20 erfolgt. Es werden nämlich die aus dem trigon. Formular 5 des § 20 entnommenen orientirten Vorwärtsrichtungen φ in ein ähnliches Formular eingetragen, diesen die entsprechenden Rückwärtssrichtungen α gegenübergestellt, der Orientirungswinkel $o_0 = \frac{[n - a]}{n}$ gebildet und hierzu die Beobachtungen α der Reihe nach addirt. Die so erhaltenen Neigungen ψ werden gegen die durch die Vorwärtsbeobachtungen erhaltenen Neigungen φ etwas differiren, und wird daher das arithmetische Mittel $\mu = \frac{\varphi + \psi}{2}$ in die folgenden Rechnungen eingeführt.

Je weniger Vorwärtsrichtungen vorliegen, um so unsicherer wird die Orientirung der Rückwärtssrichtungen, mit um so grösserer Vorsicht muss das im Folgenden beschriebene, sonst aber sehr gute Resultate liefernde Verfahren angewendet werden.

Seien nun die genäherten Coordinaten des gesuchten Punktes $P_1 = \xi$ und η aus irgend zwei beobachteten Richtungen berechnet worden, und denken wir uns zur Abscissenaxe in der Entfernung η eine Parallele gezogen, Fig. 41, so können wir den Punkt p , in welchem diese Parallele von der auf dem Punkte P_1 beobachteten Neigung μ_1 geschnitten wird, berechnen. Bezeichnen $x_1 y_1$ die Coordinaten des gegebenen Punktes P_1 , ξ_1 die gesuchte Abscisse des Punktes p , so ergiebt sich aus der Figur ohne Weiteres:

*) Behufs Elimination des in der Anmerkung auf Seite 74 gedachten Orientirungsfehlers.

**) Trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_i + (x_i - x_1) \\ \text{Hierin ist der Klammerausdruck:} \\ (x_i - x_1) = (y - y_i) \cot \mu_1 \end{array} \right\} \quad (133)$$

aus welchen beiden Gleichungen sich x_1 ergiebt.

Wären die genäherten Coordinaten und sämmtliche Neigungen μ fehlerfrei, so würden die auf sämmtlichen gegebenen Punkten nach P beobachteten Richtungen μ die Parallele in einem und demselben Punkte, und zwar in P, treffen. Da diese Voraussetzung in Wahrheit nicht zutrifft, so werden die berechneten Axenabstände x_1, x_2, \dots kleine Differenzen zeigen. Trägt man dieselben in grossem Massstabe, (1:10), auf einer graden Linie, — indem man sie bis auf die Einerstellen und die folgenden Decimalen kürzt, — von irgend einem Punkte aus ab, und trägt in den so gewonnenen Punkten 1, 2, 3, 4, Fig. 42, bezüglich die um 180° geänderten Neigungen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ an, so gewinnt man ein übersichtliches Bild der Strahlenschnitte, und es kommt nun darauf an, in dieser Schnittfigur die wahrscheinlichste Lage des Punktes P so zu ermitteln, dass, wenn man die Neigungen μ in der Weise ändert, dass sie sämmtlich den zu ermittelnden wahrscheinlichsten Punkt P treffen, die Summe der Quadrate dieser Aenderungen ein Minimum werde.

Da die Aenderungen $d\mu$ sehr kleine Winkel sind, so kann man die Bögen $d\mu$ gleich den von P auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothen setzen, welche wir mit h bezeichnen. Die Winkel $d\mu$ sind also, in analytischem Masse ausgedrückt, $= \frac{h}{s}$, wenn s die Länge der einzelnen Strahlen, also s_1 die Länge PP_1 , s_2 die Länge PP_2 etc.* bezeichnet. Die Aufgabe lautet also, es soll $\left[\frac{h^2}{s^2} \right]$ zum Minimum werden. Sind die Strahlen zum Theil einseitig, zum Theil zweiseitig beobachtet, so sind ihnen die Gewichte 1, bzw. 2 beizulegen. Setzt man die Strahlengewichte $= t$, wo also die einzelnen t entweder $= 1$ oder $= 2$ sein müssen, je nachdem die Beobachtungen ein- oder zweiseitig ausgeführt sind, und setzt man $\frac{t}{s^2} = p$, so lautet nun die Forderung

$$[p h^2] = \text{minim.}$$

Nach dem Bertot'schen Verfahren findet man die wahrscheinlichste Lage des Punktes P in der Schnittfigur wie folgt: Man schlage um einen durch Schätzung bestimmten, also angennäherten Punkt P einen Kreis, nehme in der Peripherie desselben einen beliebigen Punkt Q an, falle von Q auf sämmtliche Strahlen Lothe, und verlängere dieselben bis zum Durchschnitt mit der Kreisperipherie. Bezeichnen wir diese Durchschnittspunkte mit Ω_1, Ω_2 etc., die Fusspunkte der Lothe mit F_1, F_2 etc. und ermitteln wir die Coordinaten sämmtlicher Ω und F , tragen mit den arithmetischen Mitteln derselben als Coordinaten die Punkte K und F ein, ziehen nach einander die Linien QFT_1 , Fig. 43, T_1KT_2 , T_2MT_3 , T_3Q , so liegt der zu bestimmende Punkt P auf der Linie $Q T_3$, und zwar ist $QP = \frac{T_2 T_3 Q F}{T_2 K}$, wonach P gefunden werden kann.**

*) Die Längen s kann man nach der trigonometrischen Netzkarte ermitteln, nachdem man in dieselbe den Punkt P mittelst seiner genäherten Coordinaten eingetragen. Die Größen $\frac{1}{s^2}$ liefert sodann Tafel III Anhang.

**) Die bezüglichen Rechnungen werden in Abth. IV des trigon. Formul. 12 ausgeführt.

Den Beweis dieses Satzes werden wir, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, am Schlusse dieses Paragraphen bringen.

Die Bildung des Mittels der Coordinaten der Punkte \mathfrak{E} und F erfolgt wegen der verschiedenen Strahlengewichte p nach (73).

Zur Probe für die Richtigkeit der Construktion werden von dem gefundenen Punkte P auf die einzelnen Strahlen Lothe gefällt, die Coordinaten der Fusspunkte derselben ermittelt, deren (nach (73) zu bildendes) Mittel die Coordinaten des Punktes P geben muss, wenn die Minimumsbedingung erfüllt sein soll. (Vergl. Thl. I § 37, Beispiel 2).

Nachdem man die Längen der Lothe h ermittelt, findet man den mittleren Fehler

$$m = \sqrt{\frac{p h h}{n - 2}}$$

Um die Verbesserungen $d\mu$ in Sekunden auszudrücken, haben wir, wenn h in Centimetern, s in Metern ausgedrückt ist

$$d\mu'' = \frac{g'' h}{100 \cdot s}$$

oder für $\frac{g''}{100} = k$, und für $d\mu'' = v$:

$$v = \frac{k}{s} h .$$

wo die Grössen $\frac{k}{s}$ aus Tafel III Anhang zu entnehmen sind.

Leiten wir aus den endgültigen Coordinaten die endgültigen Neigungen r ab*), so werden dieselben gegen die Neigungen $\mu \pm \pi$ um die Grössen v differiren, worin eine Probe für die Rechnungen gegeben ist.

Wir müssen noch eines bisweilen vorkommenden Falles Erwähnung thun, dass nämlich irgend einer der Strahlen annähernd der Abscissenaxe parallel, μ also nahe $= 0^\circ$ oder 180° ist, wie in Fig. 42 der Strahl $a b$. Hier würde der Axenabstand x_s sich so gross ergeben, dass er auf dem Papierbogen, den man zur Auftragung der Schnittfigur benutzt, nicht Platz findet. In diesem Falle denkt man sich durch den durch die genäherten Coordinaten bestimmten Punkt P eine Parallele zur **Ordinatenaxe** und berechnet den Schnittpunkt des Strahls mit **dieser** Parallelen, d. h. man bedient sich statt der Formeln (133) der analogen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} y_5 &= y_5 + (y_5 - y_5) \\ y_5 - y_5 &= (x - x_5) \operatorname{tang} \mu_5 \end{aligned} \right\} \quad (133a)$$

woraus der Axenabstand y_5 zu berechnen ist. Da in Fig. 42 die Linie XX die im Abstand der genäherten Ordinate zur Abscissenaxe gedachte Parallele darstellt, ihre Entfernung von der Abscissenaxe also $= y$ ist, so ist der Abstand des Schnittpunktes 5 von dieser Linie $= y_5 - y$. Diese Grösse ist auf der Parallelen zur **Ordinatenaxe**, YY , von der Linie XX aus nach rechts oder links abzutragen, je nachdem sie positiv oder, wie in der Figur, negativ sich ergiebt.

2) **Bertot'sches Problem.****) In einer Strahlenschnittfigur, Fig. 44, soll ein Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der von demselben auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothe ein Minimum wird.

*) Abthl. 6 des trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

**) Nach einem Vortrag von Steuerrath Scherer. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band XIII.

Es seien: 1) P der gesuchte Punkt,

2) Q ein beliebiger Punkt innerhalb der Schnittfigur. Von Q werden Loten auf die einzelnen Strahlen gefällt und deren Fusspunkte mit F_1, F_2 etc. bezeichnet. F sei der Schwerpunkt der Fusspunkte, so dass, wenn $d y_F, d x_F$ die Coordinaten der einzelnen F bezeichnen:

$$a) d y_F = \frac{d y_{F_1} + d y_{F_2} + \dots}{n}$$

$$b) d x_F = \frac{d x_{F_1} + d x_{F_2} + \dots}{n}.$$

Ferner werde über $Q P$ ein Kreis geschlagen, die Durchschnitte der vorwähnten Loten mit demselben mit K_1, K_2 etc. bezeichnet. — Die Coordinaten des Schwerpunktes K der einzelnen Kreisdurchschnitte sind:

$$c) d y_K = \frac{d y_{K_1} + d y_{K_2} + \dots}{n}$$

$$d) d x_K = \frac{d x_{K_1} + d x_{K_2} + \dots}{n}.$$

I. Die Schwerpunkte K und F fallen zusammen.

Beweis:

Nach den Bezeichnungen der Fig. ist:

$$1) d y_{F_3} - d y_{K_3} = F_3 c.$$

$$d x_{F_3} - d x_{K_3} = K_3 c.$$

Da $\angle P K_3 Q = 90^\circ$, so folgt:

$$\triangle F_3 K_3 c \cong P_3 P d, \text{ also}$$

$$F_3 c = P_3 d$$

$$= d y_{P_3} - d y_P = d y_{P_3} - \gamma$$

wenn γ die Ordinate des Punktes P bezeichnet.

Analog erhält man:

$$K_3 c = d x_{P_3} - \chi$$

also nach

$$1) d y_{F_3} - d y_{K_3} = d y_{P_3} - \gamma$$

$$d x_{F_3} - d x_{K_3} = d x_{P_3} - \chi$$

und analog:

$$2) d y_{F_n} - d y_{K_n} = d y_{P_n} - \gamma$$

$$d x_{F_n} - d x_{K_n} = d x_{P_n} - \chi.$$

Durch Subtraktion der Gleichung c) von a) ergibt sich, wenn man für $d y_F - d y_K$ etc. die Werthe nach 2) einsetzt:

$$d y_F - d y_K = (d y_{P_1} - \gamma) + (d y_{P_2} - \gamma) + \dots$$

$$= d y_{P_1} + d y_{P_2} + \dots - n \gamma.$$

Nach der Minimumsbedingung für P ist aber, (Thl. I, § 37, Beispiel 2):

$$d y_{P_1} + d y_{P_2} + \dots = n \gamma$$

also $d y_F - d y_K = 0$, oder $d y_F = d y_K$, und analog $d x_F = d x_K$.

II. Wird um den beliebigen Punkt M mit MQ ein Kreis geschlagen, die Perpendikel QF bis zum Durchschnitt mit dessen Peripherie in den Punkten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots$ verlängert, so liegen in diesem Kreise die Durchschnitte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots$, ihr

Schwerpunkt \mathfrak{K} und der Mittelpunkt \mathfrak{M} bezüglich **ähnlich** zu den dem Kreise über PQ angehörigen Punkten K_1, K_2, \dots, F und M .

Beweis:

Das Polygon $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \dots \mathfrak{K}_n$ ist \sim dem Polygon $K_1, K_2 \dots K_n$, denn die Peripheriewinkel bei Q sind für beide Kreise gemein, mithin die zugehörigen Centriwinkel gleich. — Denkt man sich nun die beiden Kreise nach Anleitung der Fig. 45 mit ihren Mittelpunkten zusammengelegt, so ist nur noch zu zeigen, dass $\mathfrak{K}F\mathfrak{M}$ eine Gerade ist. Es ist aber, da nach I $d y_F = d y_{K_1} + d y_{K_2} + \dots$

$$\alpha) n d y_F = d y_{K_1} + d y_{K_2} + \dots$$

$$\beta) n d x_F = d x_{K_1} + d x_{K_2} + \dots$$

und $\gamma) n d y_{\mathfrak{K}} = d y_{\mathfrak{K}_1} + d y_{\mathfrak{K}_2} + \dots$

$$\delta) n d x_{\mathfrak{K}} = d x_{\mathfrak{K}_1} + d x_{\mathfrak{K}_2} + \dots$$

Bezeichnet man ferner die Neigungswinkel $HM\mathfrak{K}_1, HM\mathfrak{K}_2, \dots$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, so ist, wenn man die Radien der beiden Kreise $= r$ und R setzt:

$$d y_{K_1} = r \sin \alpha_1 \quad \text{und} \quad d x_{K_1} = r \cos \alpha_1$$

$$d y_{K_2} = r \sin \alpha_2 \quad d x_{K_2} = r \cos \alpha_2$$

etc. etc.

$$d y_{\mathfrak{K}_1} = R \sin \alpha_1 \quad d x_{\mathfrak{K}_1} = R \cos \alpha_1$$

$$d x_{\mathfrak{K}_2} = R \sin \alpha_2 \quad d x_{\mathfrak{K}_2} = R \cos \alpha_2$$

etc. etc.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen $\alpha) - \delta)$ ein, dividirt $\alpha)$ durch $\gamma)$, $\beta)$ durch $\delta)$, so findet man:

$$\frac{d y_F}{d y_{\mathfrak{K}}} = \frac{r \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \dots}{R \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \dots} = \frac{r}{R}.$$

Ebenso findet man:

$$d x_T : d x_{\mathfrak{K}} = \frac{r}{R}$$

also: $d y_F : d y_{\mathfrak{K}} = d x_F : d x_{\mathfrak{K}} = r : R = FM : \mathfrak{K}M$

woraus die ähnliche Lage der Punkte \mathfrak{K} und \mathfrak{M} gegen F und M folgt.

III. Ist nun P noch unbekannt, so geben uns diese Ähnlichkeitspunkte das Mittel an die Hand, P zu construiren. Man verbinde Q mit F , Fig. 46, und verlängere QF nach T_1 , dann sind T_1 und \mathfrak{T}_1 ähnlich gelegen, — wie alle Punkte der beiden Peripherien, welche mit Q in grader Linie gelegen, (vergl. den Beweis zu II bezüglich der ähnlichen Lage der Punkte \mathfrak{K} und K). — Zieht man weiter $T_1 K T_2$, dann ist T_2 der Ähnlichkeitspunkt von Q , denn da T_1 mit \mathfrak{T}_1 und F mit \mathfrak{K} ähnlich liegen, so sind die durch \mathfrak{T}_1 und F und durch T_1 und \mathfrak{K} gezogenen Sehnen Ähnlichkeitssehnen, mithin deren Endpunkte Q und T_2 ähnlich gelegen. Zieht man nun noch den Durchmesser $T_2 M T_3$, dann ist der ähnlich gelegene Durchmesser $Q P$ und der mit T_3 ähnlich gelegene Punkt P noch zu bestimmen.

Man verbinde Q mit T_3 , dann ist $\angle T_1 T_2 T_3 = T_1 Q T_3$. Wegen der ähnlichen Lage von $\mathfrak{K}, T_2, \mathfrak{M}$ gegen F, Q und M ist weiter $\angle \mathfrak{K} T_2 \mathfrak{M} = F Q M$, folglich auch $T_1 Q T_3 = F Q M$, also $Q M T_3$ eine Gerade, mithin P ähnlich zu T_3 gelegen. Es ist somit:

$$\triangle \mathfrak{K} T_2 T_3 \sim F Q P$$

also $Q P = \frac{T_2 T_3 \cdot Q F}{T_2 \mathfrak{K}}$.

3) **Lösung des Problems für drei Strahlen.** Sind nur drei Visirstrahlen vorhanden, so entsteht ein fehlerzeigendes Dreieck, unsere Aufgabe lautet dann also:

In einem Dreieck ist ein Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten gefällten Lothe ein Minimum wird.

Bezeichnen h_a, h_b, h_c diese Lothe, so besteht die Bedingung

$$1) a h_a + b h_b + c h_c = 2F$$

$$2) h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \text{minim.}$$

Durch Differentiation von 1) erhalten wir:

$$3) a d h_a + b d h_b + c d h_c = 0$$

und aus Gl. 2) infolge der Minimumsbedingung:

$$4) h_a d h_a + h_b d h_b + h_c d h_c = 0$$

und aus 3) die Correlatengleichung:

$$5) a k d h_a + b k d h_b + c k d h_c = 0$$

und wenn wir die Coofficienten der $d h$ in 4) denen in 5) gleichsetzen:

$$5) h_a = a k, \quad h_b = b k, \quad h_c = c k.$$

Wären den Höhen h verschiedene Gewichte beizulegen, so würde das an der Gl. 1) und daher auch an Gl. 5) nichts ändern, dagegen geht 4) über in:

$$p_a h_a d h_a + p_b h_b d h_b + p_c h_c d h_c = 0$$

woraus wir analog mittelst 5) erhalten:

$$h_a = \frac{a}{p_a} k, \quad h_b = \frac{b}{p_b} k, \quad h_c = \frac{c}{p_c} k.$$

oder $7) h_a : h_b : h_c = \frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}$. *)

Man hat daher ein dem fehlerzeigenden Dreiecke ähnliches Dreieck zu construiren, Fig. 47, derart, dass die correspondierenden Seiten beider Dreiecke unter sich bezüglich die parallelen Abstände $\frac{a}{p_a}, \frac{b}{p_b}, \frac{c}{p_c}$ erhalten, sodann die correspondierenden Ecken der Dreiecke mit einander zu verbinden. Die Verbindungslien schneiden sich im gesuchten Punkte P , denn fällt man von P die Lothe h_a, h_b, h_c , so verhalten sich diese wie die Abstände der correspondierenden Dreiecksseiten, d. i. wie $\frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}$, wie Gl. 7) erfordert.

§ 25.

Einschneiden für zwei Punkte.

Es sind zwei neu zu bestimmende Punkte P_a und P_b durch gegenseitige Visur verbunden und sind weitere Visuren nach **gegebenen** Punkten vorhanden. Die Coordinaten der beiden Punkte P_a und P_b sind zu berechnen.

Zu einer **einmaligen** Bestimmung der beiden Punkte sind auf jedem der selben mindestens die Richtungen nach 2 gegebenen Punkten und dem **anderen** zu bestimmenden Punkte zu beobachten. Bezeichnen in Fig. 34 A und B die

*) Die pr. Verm.-Anw. setzt für a, b, c die Zeichen g_a, g_b, g_c und für $\frac{a}{p_a}, \frac{b}{p_b}, \frac{c}{p_c}$ die Zeichen m_a, m_b, m_c .

zu bestimmenden, C und S die gegebenen Punkte, so kann die Auflösung der Dreiecke A B C und A B S nach Formel (100) und (101) erfolgen, in welcher e als Entfernung der gegebenen Punkte von einander bekannt, und g die Unbekannte ist. Es ist diese Aufgabe bekannt unter dem Namen der **Hansen'schen Aufgabe** oder der **Aufgabe von der unzugänglichen Distanz**.

Hat man überschüssige Beobachtungen, so erfolgt die Berechnung der **genäherten Coordinaten** nach § 22, oder, wenn auch Vorwärtsbeobachtungen vorliegen, nach § 21. Sodann berechnet man in bekannter Weise für beide neu zu bestimmenden Punkte die genäherten Neigungen n_a und n_b . Letztere sind nun durch Änderung der genäherten Coordinaten um die Beträge $d y$ und $d x$ um die Beträge $d n_a$, $d n_b$ zu ändern. Diese Änderungen sind für den Punkt P_a

1) für die Richtung von P_a nach P_b , da **beide** Endpunkte dieses Strahls eine Änderung erleiden:

$$d n_b = a_b d x_a + b_b d y_a + c_a d x_a + d_a d y_b$$

2) für die übrigen den Punkt P_a bestimmenden Richtungen:

$$d n_1 = a_1 d x_a + b_1 d y_a$$

$$d n_2 = a_2 d x_a + b_2 d y_a$$

etc.

Die Fehlergleichungen werden daher lauten, (unter Berücksichtigung des Orientierungsfehlers z, vergl. § 22):

$$v_b = a_b d x_a + b_b d y_a + c_a d x_b + d_a d y_b + z_a + f_b$$

$$v_1 = a_1 d x_a + b_1 d y_a + f_1$$

$$v_2 = a_2 d x_a + b_2 d y_a + f_2$$

etc.

und analog für den Punkt P_b

$$v_a = a_a d x_b + b_a d y_b + c_b d x_a + d_b d y_a + z_b + f_a$$

$$v_1 = a_1 d x_b + b_1 d y_b + f_1$$

$$v_2 = a_2 d x_b + b_2 d y_b + f_2$$

etc.

Indem man diese Fehlergleichungen quadriert, addiert, die Summe der Reihe nach nach den vier Unbekannten $d y_a$, $d x_a$, $d y_b$, $d x_b$ differentiiert, die erhaltenen Differentialquotienten = 0 setzt, erhält man vier Normalgleichungen von der Form des § 9, 4), aus denen sich die vier Unbekannten nach den Formeln (84) und (85) ergeben.

§ 26.

Einschneiden für zwei Punkte mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.

Sind zwei neu zu bestimmende Punkte durch gegenseitige Visuren verbunden, so kann man deren nach § 24 darzustellenden Schnittfiguren durch gegenseitige Wechselverbesserungen berichtigen, ehe man in denselben die wahrscheinlichste Lage der gesuchten Punkte endgültig ermittelt. Das folgende einfache Beispiel wird das Verfahren verdeutlichen. Die Punkte P_a und P_b seien in der in Fig. 48 angedeuteten Weise bestimmt. Man berechne zunächst die genäherten Coordinaten für P_a , zu dessen Bestimmung, da P_b noch unbekannt, zunächst nur zwei Strahlen zu Gebote stehen, hierauf berechne man P_b , unter Einführung des **vorläufig bestimmten**

Punktes P_a als gegebenen Punkt, so dass also P_b aus **drei** Strahlen erhalten wird. Die Schnittfigur für P_b ist also ein fehlerzeigendes Dreieck, — Fig. 50, Schnittfigur für P_b —. In einem beliebigen Punkt P desjenigen Strahls $a b$, welcher die Visur nach P_a darstellt, trage man die zur Bestimmung des Punktes P_a benutzten Neigungen an, und erhält so die Schnittfigur für P_a . In der Schnittfigur für P_b bestimme man nach § 24, 3) die wahrscheinlichste Lage des Punktes P_b . Man erhält den Punkt p_b . Zieht man $p_b a' \parallel b a$, so erhält man auch in der Schnittfigur für P_a ein fehlerzeigendes Dreieck, in welchem man den Punkt p_a in gleicher Weise bestimmt. Die weitere Parallele $p_a b'$ verbessert das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für P_b und somit die Lage des Punktes p_b , welcher nach p_b' rücken wird. Ebenso verbessert die Parallele $p_b' a''$ das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für P_a . Der Punkt p_a rückt infolge dieser Verbesserung nach p_a' . Diese Wechselverbesserungen sind fortzusetzen, bis eine wesentliche Änderung der Punkte p nicht mehr erzielt wird.

Es versteht sich von selbst, dass man zu der nach jedem Wechsel erforderlich werdenden Neubestimmung der Punkte p nicht immer wieder das Verfahren des § 24, 3) zu wiederholen braucht. Hat man in dem Dreieck $A B C$, Fig. 49, den Punkt p bestimmt, so findet man die dem Punkte p ähnlich gelegenen Punkte p' , p'' in den Dreiecken $A B' C'$, $A B'' C''$ in der aus der Figur ohne Weiteres verständlichen Weise.

Das hier dargestellte Verfahren der schrittweisen Annäherung kann man durch folgendes direktere Verfahren umgestalten.

Gesetzt, man habe die Wechselnäherungen so lange fortgesetzt, bis eine weitere Verschiebung der Punkte p nicht mehr stattfindet, so wird man erkennen, dass die endgültig ermittelten Punkte p_a und p_b , Fig. 51, in den verlängerten Basen $b b$ und $a a$ der zuletzt erhaltenen fehlerzeigenden Dreiecke liegen müssen. Denn läge z. B. p_b über oder unter der verlängerten Basis $b b$, so würde eben nicht $b b$ die durch die letzte Verbesserung erhaltene Basis des fehlerzeigenden Dreiecks $D b b$ bilden, sondern die durch p_b zu $b a$ gezogene Parallele. Entsprechend würde sich auch die Lage des Punktes p_a ändern, mithin auch die Parallelen $p_a a$, also auch der Punkt p_b etc. Es würde also bei weiterer Fortsetzung des Verfahrens noch eine Verschiebung der Punkte p erzielt werden, was der Voraussetzung, dass das Verfahren zu Ende geführt sei, widerspricht.

Zieht man nun durch die Spitze A des fehlerzeigenden Dreiecks $A B C$ zu $a b$ die Parallelen $A E$, ermittelt in den Dreiecken $A B C$ und $D E F$ nach § 24, 3) die Punkte P_a und P_b , bezeichnet deren Abstände von den Dreiecksbasen mit m und n , die Entfernung der Parallelen $a a$ und $b b$ von einander, d. i. den Abstand der den Punkten P_a und P_b ähnlich gelegenen Punkten p_a und p_b von den Basen ihrer endgültig verbesserten fehlerzeigenden Dreiecke mit x , die Höhen dieser letzteren Dreiecke mit h_a und h_b , die Höhe der Dreiecke $A B C$ und $D E F$ mit H , so ist:

$$1) x : h_a = m : H$$

$$2) x : h_b = n : H$$

also $3) h_a : h_b = n : m$

und weiter: $4) h_a + h_b = H + x$.

Setzt man $h_a = n y$, so ist nach 3) $h_b = m y$, und man erhält aus 1) und 4)

$$I) x = \frac{m n y}{H}$$

$$II) m y + n y = H + x.$$

Diese Gleichungen ergeben, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{H}{\frac{m+n}{mn}H-1}.$$

Ist hieraus x gefunden, so theilt man $H+x$ gemäss II nach dem Verhältniss $m:n$, um die Höhen $h_a (= ny)$ und $h_b (= mx)$ zu erhalten. Mit Hülfe dieser Höhen lassen sich die endgültigen fehlerzeigenden Dreiecke Aaa und Dbb construiren und werden in denselben die gesuchten Punkte p_a und p_b nach Anleitung der Fig. 49 erhalten. Eine Probe für die Richtigkeit der Construktion gewährt der Satz, dass diese Punkte in den verlängerten Basen bb und aa liegen müssen.

§ 27.

Wiederherstellung verlorener trigonometrischer Punkte durch Rückwärtseinschneiden.

Man ermittelt zunächst die ungefähre Lage des verlorenen Punktes mit Hülfe des vorhandenen Kartenmaterials, bestimmt die Coordinaten dieses vorläufigen Punktes durch Rückwärtseinschneiden nach denselben gegebenen Punkten, welche früher zur Bestimmung des verlorenen Punktes gedient hatten. Aus den Coordinaten des vorläufigen Punktes und denen des verlorenen Punktes lässt sich die Exzentrizität e , (d. h. die Entfernung beider Punkte von einander), sowie der Winkel herleiten, den die Strecke e mit irgend einem der neu beobachteten Strahlen einschliesst, welche Elemente zur Wiederherstellung des gesuchten Punktes auf dem Felde genügen.

Bei der Coordinatenberechnung des **vorläufigen** Punktes können die bekannten Coordinaten des **verlorenen** Punktes als genäherte Coordinaten des ersten Punktes, die bekannten Neigungen der von dem verlorenen Punkte nach gegebenen Punkten hin ausgehenden Strahlen als genäherte Neigungen benutzt werden, so dass sich die Berechnung dieser Elemente, sowie die der Grössen a und b nach (117) erübrigten.

§ 28.

Einschalten.*)

Sind in Fig. 29 a und o gegebene, b , c , d , e neu zu bestimmende Punkte, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes ganz nach § 17. Die Basis ao ist bekannt, mithin können sämmtliche Dreiecke des Netzes, und sodann die Coordinaten nach § 40 berechnet werden. Dass sich auch der Fall der Fig. 28 hiernach behandeln lässt, ist bereits § 11 erwähnt.

Sind in Fig. 52 die Punkte 3, 4 und 1 gegeben, also die Seiten A und E bekannt, die Punkte 5, 6, 7, 8 neu zu bestimmen und zu dem Ende sämmtliche Winkel des Netzes gemessen, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes nach denselben Principien, nur geht die Bedingung zu 2) des § 17 über in

$$[\beta] = \angle \hat{3} \hat{4} \hat{1} = r_4^3 - r_4^1, \quad (135)$$

während die Bedingung zu 3) desselben Paragraphen lautet:

$$\begin{aligned} E \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots &= 1 \\ A \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots &= 1 \end{aligned} \quad (135a)$$

wie man leicht nach Analogie des § 10, Formel (89), findet.

*) Trigon. Formul. 16 der preussischen Verm.-Anw.

§ 29.

Einketten.*)

Das Dreiecksnetz ist so einzurichten, dass wenigstens zwei Punkte desselben mit gegebenen Punkten, $\hat{\alpha} 12$ und $\hat{\alpha} 15$, — Fig. 53 — zusammenfallen. Ausser den Dreieckswinkeln sind womöglich auf den gegebenen Punkten noch die Richtungen nach anderen gegebenen Punkten zu beobachten — ($\hat{\alpha} 15 - \hat{\alpha} 40$ und $\hat{\alpha} 12 - \hat{\alpha} 41$). Die Winkel haben dann folgenden Bedingungen zu genügen:

- 1) Die Summe der Winkel in den einzelnen Dreiecken muss 180° betragen.
- 2) In dem Zuge $\hat{\alpha} 40, \hat{\alpha} 15, 13, 14, \hat{\alpha} 12, \hat{\alpha} 41$ muss die Summe der gemessenen Winkel

$$\Sigma = (2n - 4)R - C$$

sein, worin C den Winkel bedeutet, welchen die Dreiecksseiten unter sich bilden, also

$$1) \Sigma = (2n - 4)R - (r_E - r_A).$$

Bezeichnen $f_1, f_2 \dots f_n$ die gegen die Bedingung zu 1) sich ergebenden Widersprüche, (1), (2) ... (n) die danach den Winkeln der Dreiecke 1, 2 ... n zufallenden Verbesserungen, ferner f_s den Widerspruch gegen die Bedingung zu 2), (s) die den Polygonwinkeln danach zufallenden Verbesserungen, so ist, wenn m die Anzahl der Polygonpunkte, $z_1, z_2 \dots z_n$ bezüglich die Anzahl der Winkel der Dreiecke 1, 2, ... n, welche zugleich in dem **Polygon** liegen, bezeichnen, — (so dass z. B. $z_2 = 1, z_3 = 2$), — so lautet die aus dem Polygonzuge sich ergebende Fehlergleichung: 2) $m(s) + z_1(1) + z_2(2) + \dots + z_n(n) - f_s = 0$. (136)

Ferner ergeben sich aus den einzelnen **Dreiecken**, wenn $\frac{1}{p}(s)$ und $\frac{1}{q}(s)$ die Antheile sind, welche denjenigen Dreieckswinkeln, die zugleich dem Polygonzuge angehören, aus der **Polygon**verbesserung zufallen:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 3(1) + \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \right)(s) - f_1 = 0 \\ 3(2) + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} \right)(s) - f_2 = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (137)$$

Die Antheile $\frac{1}{p}(s)$ und $\frac{1}{q}(s)$ sind verschieden, je nach der Anzahl der die einzelnen Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel, da jedem Polygonwinkel nur die Verbesserung (s) zukommt, und diese zu gleichen Theilen auf die den Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel zu vertheilen ist. So ist z. B. im Dreiecke 3 der auf den Winkel β fallende Antheil der Verbesserung (s): $\frac{1}{p_3}(s) = \frac{1}{3}(s)$, weil (s) sich auf die Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ vertheilt, dagegen ist in dem Dreiecke 3 der Antheil des Winkels α , d. i.: $\frac{1}{q}(s) = \frac{1}{2}(s)$, weil sich hier (s) nur auf die Winkel α_3 und β_4 vertheilt. Liegt nur ein Dreieckswinkel im Polygon, so ist entweder $\frac{1}{p}$ oder $\frac{1}{q} = 0$.

Die Auflösung der Gleichungen (136) und (137) erfolgt, indem man die Verbesserungen (1), (2) ... aus den Gleichungen (137) berechnet, sodann bezüglich

* Trigon. Formul. 17 der pr. Verm.-Anw.

mit den Zahlen $z_1, z_2 \dots$ multiplicirt und die Summe der erhaltenen Produkte in (136) einsetzt, wodurch sich (s) ergiebt. Wird dieses dann in (137) eingesetzt, so erhält man (1), (2) ... (n).

Es ist gleichgültig, ob man den Polygonfehler f_s aus dem Polygon $\hat{\triangle} 40, \hat{\triangle} 15, 14, 13, \hat{\triangle} 12, \hat{\triangle} 41$, oder aus $\hat{\triangle} 40, \hat{\triangle} 15, 10, 11, \hat{\triangle} 12, \hat{\triangle} 41$ berechnet, denn wenn neben einer Polygonbedingung die Dreiecksbedingungen erfüllt sind, so ist auch die andere Polygonbedingung erfüllt.

In dem in unserer Figur dargestellten Beispiele sei der Fehler f_s aus dem Polygonzuge $40, 15, 14, 13, 12, 41$ gebildet. An den $m, (=4)$ Winkeln desselben participiren:

- 1) der Anschlusswinkel auf $\hat{\triangle} 15$
- 2) im Dreiecke 1 die Winkel β und γ
- 3) " " 2 " " β
- 4) " " 3 " " α und β
- 5) " " 4 " " α und β
- 6) der Abschlusswinkel auf $\hat{\triangle} 12$.

Demnach ist:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 & \frac{1}{p_1} &= \frac{1}{2} & \frac{1}{q_1} &= \frac{1}{3} \\ z_2 &= 1 & \frac{1}{p_2} &= \frac{1}{3} & \frac{1}{q_2} &= 0 \\ z_3 &= 2 & \frac{1}{p_3} &= \frac{1}{3} & \frac{1}{q_3} &= \frac{1}{2} \\ z_4 &= 2 & \frac{1}{p_4} &= \frac{1}{2} & \frac{1}{q_4} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sei $f_1 = +28'', f_2 = -11, f_3 = +28, f_4 = -9, f_s = +19$, so lautet die Bedingungsgleichung (136)

$$I \quad 4(s) + 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) - 19 = 0$$

und die Bedingungsgleichungen (137)

$$II \quad \begin{cases} 3(1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)(s) - 28 = 0 \\ 3(2) + \left(\frac{1}{3} + 0\right)(s) + 11 = 0 \\ 3(3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)(s) - 28 = 0 \\ 3(4) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(s) + 9 = 0 \end{cases}$$

Löst man die Gleichungen II einzeln nach (1), (2), (3), (4) auf, multipliziert mit z und addirt, so ergiebt sich:

$$III \quad \begin{cases} 2(1) = -\frac{5}{9}(s) + \frac{56}{3} \\ 1(2) = -\frac{1}{9}(s) - \frac{11}{3} \\ 2(3) = -\frac{5}{9}(s) + \frac{51}{3} \\ 2(4) = -\frac{6}{9}(s) - \frac{18}{3} \end{cases}$$

Summe = $-\frac{17}{9}(s) + \frac{83}{3}$.

Durch Einsetzung dieser Summe in II erhält man: $(s) = -4,1$ und durch Einsetzung von $(s) = -4,1$ in II oder III: $(1) = +5$, $(2) = -3,2$, $(3) = +10,5$, $(4) = -1,6$.

Es erhält nun jeder der Dreieckswinkel der Dreiecke 1, 2, 3, 4 bezüglich die Verbesserung (1), (2), (3), (4), ausserdem aber diejenigen Dreieckswinkel, welche zugleich Theile der Polygonwinkel bilden, die Verbesserungen $\frac{1}{p} (s)$ bzw. $\frac{1}{q} (s)$.

Nach Verbesserung der Winkel erfolgt die Berechnung der Dreiecksseiten in der Weise, dass zunächst die Anfangsseite $a = 1000$ angenommen wird. Hierauf erfolgt dann nach § 40 eine **vorläufige** Berechnung der Coordinatenunterschiede.*). Die Summe derselben dient zur Berechnung der **vorläufigen** Entfernung \mathfrak{S} der **gegebenen** Punkte. Ist die bekannte **wirkliche** Entfernung dieser Punkte $= S$, so ist $q = \frac{S}{\mathfrak{S}}$ die Verhältnisszahl, mit welcher die **vorläufigen** Seiten der Dreiecke und die **vorläufigen** Coordinatenunterschiede zu multipliciren sind, um zu den **wahren** Werthen derselben zu gelangen.

Sind die An- und Abschlussneigungen auf den Punkten 12 und 15 nicht beobachtet, so beschränkt sich die Ausgleichung der Winkel nur auf die Vertheilung der Widersprüche f_1, f_2, \dots, f_n in den einzelnen Dreiecken 1, 2, ..., n. Die Berechnung der vorläufigen Coordinatenunterschiede erfolgt unter Zugrundelegung einer blos durch Schätzung bestimmten Anfangsneigung. Ausser der vorläufigen Entfernung \mathfrak{S} ist dann aus den vorläufigen Coordinatenunterschieden und den Coordinaten der **gegebenen** Punkte noch der Fehler der Anfangsneigung herzuleiten**). Letztere ist dann um den erhaltenen Betrag zu verbessern, und die Berechnung, nachdem selbstverständlich auch die wahren Werthe der Dreiecksseiten durch Multiplication der vorläufigen Werthe mit q ermittelt worden, mit den so berichtigten Elementen zu wiederholen.

IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

§ 30.

Das Erdspäroid.

Ein Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, heisst Sphäroid. Ein solcher Körper ist bekanntlich die Erde. Die Meridiane, d. i. die durch die Rotationsaxe der Erde gelegten Schnitte, sind also Ellipsen, und es können daher, wo es sich um die Aufnahme ganzer Länder handelt, die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden, bedürfen vielmehr gewisser Korrekturen***), welche ihrerseits die Kenntniss der Excentricität der Meridianellipse bzw. der Abplattung erfordern. Wir wollen daher

*) Im trigon. Form. 19 der pr. Verm.-Anw. Vom § 40 muss hier zum Verständniss des Folgenden vorweg Kenntniss genommen werden.

) Ist die aus den Coordinaten der gegebenen Punkte abgeleitete Neigung der diese Punkte verbindenden Geraden $= r$, die aus den **vorläufigen Coordinaten sich ergebende Neigung $= n$, $(\tan n = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]})$, so ist $n - r$ der Fehler der Anfangsneigung.

***) Wenigstens einer strengen Berücksichtigung des mit der geographischen Breite wechselnden Krümmungsradius der Meridianellipse pp.