Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

A. Dreiecksnetz.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

2) **Der mittlere Fehler** der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \tag{96}$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \text{ etc.} \tag{97}$$

3) Beispiel.*) Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$l_1 = 62^0\ 37'\ 24''$ und sei das Gewicht $p_1 = 16$
$l_2 = 48^0\ 47'\ 46''$ „ „ „ „ $p_2 = 25$
$l_3 = 68^0\ 34'\ 35''$ „ „ „ „ $p_3 = 36$
Sa. $179^0\ 59'\ 45''$
$w = -15''$

Die Fehlergleichung lautet: $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0.$
Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1, \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1, \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = +15''$$

also $$k_1 = \frac{1500}{13}$$

somit $$v_1 = \frac{1500}{13\,.\,16} = +7{,}2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13\,.\,25} = +4{,}6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13\,.\,36} = +3{,}2''$$

$$\text{Sa.} +15'' = -w.$$

Man erkennt, dass die Verbesserungen v den Gewichten p umgekehrt proportional sind.

III. Trigonometrische Messungen.

A. Dreiecksnetz.

§ 11.

Triangulirung.**)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

**) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschritten sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39—40 Kenntniss zu nehmen.

rückzuführen ist, erkennt man sofort, wenn man sich den Punkt D so verschoben denkt, dass er innerhalb des Dreiecks A B C zu liegen kommt), — doch wird man, so weit es sich um Zwecke der niederen Geodäsie handelt, im Allgemeinen diese verhältnissmässig bedeutende Rechenarbeit vermeiden, und zu einem anderen Ausgleichungsverfahren seine Zuflucht nehmen, (vergl. § 17), welches eben die möglichst einfache Gestaltung des Netzes erfordert. Hat man ein solches Netz entworfen, so ist es alsdann leicht, dasselbe durch Einschaltung weiterer Dreieckspunkte nach einer der in den nächsten Paragraphen zu erörternden Methoden nach Belieben zu ergänzen, und grade dieser Umstand macht es möglich, auch da, wo eine sehr dichte Lage der Dreieckspunkte nothwendig erscheint, (vergl. Fig. 30), dem Netze der Hauptdreiecke dennoch eine einfache Gestalt zu geben. Da die Dreiecksseiten des Hauptnetzes (Netz 1. Ordnung), eine beliebig grosse Länge haben können, so wird es häufig möglich sein, das ganze Gebiet mit einem einzigen Dreiecke zu überspannen, und dieses als Hauptdreiecksnetz anzusehen, indessen ist der Form der Fig. 28 der Vorzug zu geben, in welcher auf einer gemeinschaftlichen Basis **zwei** Dreiecke, A B C und A B D, stehen, deren Spitzen C und D durch gegenseitige Visur verbunden sind, wodurch es möglich wird, die Punkte C und D nach § 26 zu behandeln, d. h. ihre infolge der unvermeidlichen Fehler etwas fehlerhafte Lage durch gegenseitige Wechselverbesserungen zu berichtigen. Wo es nicht möglich ist, das ganze Messungsgebiet mit einem so einfachen Netze wenigstens annähernd zu überspannen, wird sich das Dreiecksnetz doch wenigstens aus Theilen von der Form der Fig. 28 oder ähnlicher einfacher Formen zusammensetzen lassen, wie das Hauptdreiecksnetz in Fig. 30.

Die Winkel des Hauptnetzes sind mit möglichster Schärfe zu messen, während die Winkel des Netzes niederer Ordnung, (in Fig. 30 punktirt dargestellt), eine geringere Genauigkeit beanspruchen. Ausser den Winkeln des gesammten Netzes misst man ferner die Neigung irgend einer Dreiecksseite, z. B. A B*) gegen den Meridian, welchen man als Abscissenaxe des Coordinatensystems, für welches später die Coordinaten der Netzpunkte zu berechnen sind, ansieht. Endlich ist noch eine in ebenem Terrain gelegene Dreiecksseite, z. B. C D, (Basis), oder besser mehrere solcher Basen zu messen, worauf alle zur Berechnung des Netzes nöthigen Elemente bekannt sind.

Behufs Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte verschafft man sich nun zunächst einen angenäherten Werth der Seite A F des Hauptnetzes, indem man von der bekannten Basis C D ausgehend nacheinander die Dreiecke C D E, C E A und C A F berechnet. Dass der gefundene Werth für A F wegen der sich häufenden Fehler nur ein angenäherter ist, kümmert uns **vorläufig** nicht.

Ist nun A der Nullpunkt des Coordinatensystems, so sind seine Coordinaten $= 0$. Die Coordinaten des Punktes F finden wir nach (11)

$$y_F = AF \sin \nu_A^F \text{ und } x_F = AF \cos \nu_A^F$$

somit sind die Coordinaten zweier Punkte des Hauptnetzes bekannt**), worauf die

*) Ist die Neigung einer Strecke A B auf Punkt A gemessen, so bezeichnet man sie mit ν_A^B, ist sie auf B gemessen, mit ν_B^A. Beide Neigungen differiren, wie man aus Fig. 30 leicht erkennt, um 180°.

**) Hätte das Hauptnetz die Form der Fig. 29, so würde man die Winkel desselben nach § 17 auszugleichen und sämmtliche Dreiecksseiten zu berechnen haben, worauf die Coordinaten der Netzpunkte nach §§ 39—40 gefunden werden können. Wegen der vollständigen Ausgleichung der Winkel des Netzes können Schlussfehler sich nicht ergeben. Der § 41 findet hier somit keine Anwendung.

Punkte C und E, B und G nach § 26 gefunden werden können. Nunmehr wird zur Coordinatenberechnung des Netzes zweiter Ordnung geschritten, welche nach § 18—26 zu erfolgen hat.

Nachdem wir so sämmtliche Coordinaten der Netzpunkte ermittelt, haben wir uns zu erinnern, dass der ganzen Rechnung nur ein **angenäherter** Werth der Basis A F zu Grunde liegt. Wir sind nun aber im Stande, aus den Coordinaten der Endpunkte der gemessenen Basen deren Längen herzuleiten*) und mit den durch direkte Messung gefundenen Werthen derselben zu vergleichen. Seien die **gemessenen** Längen der Basen l, l_2, l_3 . . ., die aus den Coordinaten berechneten Längen correspondierend $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$, so ist, wenn man das Verhältniss $l_1 : \lambda_1 = q_1$, $l_2 : \lambda_2 = q_2$ etc. setzt: $l_1 = q_1 \lambda_1$, $l_2 = q_2 \lambda_2$ etc. Es bedeuten also die Werthe q diejenigen Zahlen, mit welchen man die aus den Coordinaten abgeleiteten Werthe zu multipliciren hat, um die gemessenen, genaueren Werthe l zu erhalten. Man bildet nun aus den einzelnen q das arithmetische Mittel

$$Q = \frac{q_1 + q_2 + \cdots q_n}{n}$$

welches der Eins natürlich sehr nahe kommen wird, und multiplicirt mit Q die berechneten Coordinaten sämmtlicher trigonometrischen Punkte des Netzes.

§ 12.
Vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke.

In einem Dreiecke sei die Seite a und die Winkel α, β, γ gemessen, die Seiten b und c sind zu berechnen. Wenn nun die gemessenen Grössen kleine Fehler, $d\,a$, $d\,\alpha$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$ enthalten, wie gross sind die Fehler, welche dadurch in den Seiten b und c entstehen?

Es ist $\quad b = a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = a \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$$\log b = \log a + \log \sin\beta - \log \sin\alpha$$
$$\log c = \log a + \log \sin\gamma - \log \sin\alpha$$

also wenn wir differentiiren, nach (37)

$$\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a} + \frac{d\,\sin\beta}{\sin\beta} - \frac{d\,\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{d\,c}{c} = \frac{d\,a}{a} + \frac{d\,\sin\gamma}{\sin\gamma} - \frac{d\,\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

oder nach (39): $\quad$ 1) $\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a} + d\,\beta \cot\beta - d\,\alpha \cot\alpha$

2) $\frac{d\,c}{c} = \frac{d\,a}{a} + d\,\gamma \cot\gamma - d\,\alpha \cot\alpha.$

Sollen nun die in den einzelnen Dreiecksseiten entstehenden Fehler den Seiten selbst proportional, soll also z. B. $\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a}$ sein, so muss nach Gleichung 1) $d\,\beta \cot\beta - d\,\alpha \cot\alpha = 0$ werden. Sind die Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen, so dass die Winkelfehler als gleich angenommen werden können, also $d\,\alpha = \pm d\,\beta$, so muss demnach $\cot\beta = \pm \cot\alpha$ sein, also entweder $\beta = \alpha$ oder $\beta = 180 - \alpha$. **Beiden**

*) Damit diese Rechnungen möglichst zutreffende Resultate liefern, müssen die Basen zwischen zwei gut bestimmten Punkten gewählt werden.

Bedingungen wird genügt, wenn $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$, also $\gamma = 0$ wird. Dieses Resultat ist wichtig bei indirekten Längenmessungen, wenn man eine Länge b durch Messung einer Hülfsbasis a und der Winkel α, β, γ ermitteln will. Man wird die Hülfsbasis so zu legen haben, dass der ihr und der der zu berechnenden Seite gegenüberliegende Winkel möglichst nahe bei 90^0 liegen. Sollen **beide** Seiten, b und c, berechnet werden, so bleibt nichts übrig, als den Winkel α bei 90^0, die Winkel β und γ bei 45^0 zu nehmen.

Bei Triangulationen, wo man nicht vorher weiss, **welche** Seite zur Berechnung jedes einzelnen Dreiecks dienen wird, wird man allen Verhältnissen gleichzeitig am besten Rechnung tragen, wenn man sämmtliche Dreiecke des Netzes soviel als möglich **gleichseitig** zu machen sucht.

§ 13.

Signale.

Um die trigonometrischen Punkte mit dem Fernrohr des Winkelmessers anvisiren zu können, sind über denselben Signale zu errichten. Eine für die Zwecke der Kleintriangulirung empfehlenswerthe Construktion derselben ist folgende: (Fig. 31). Das Signal wird aus 5—10 cm starken, 5—10 m langen Stangen zusammengesetzt. Fig. 31b zeigt die Verbindung derselben an der Spitze. Aus ca. 30—40 cm langen Stangen wird ein gleichseitiges Dreieck zusammengenagelt. In die Winkel α, β, γ werden die Spitzen der drei Hauptstrebestangen gelegt und durch einen durchgezogenen starken Eisendraht oder mit Nägeln befestigt. In das Dreieck hinein wird die verticale Signalstange geschoben und mit einem Nagel festgenagelt, die Spitze derselben mit einer Flagge versehen, und nun das ganze Signal aufgerichtet, und durch drei Mann über den trigonometrischen Punkt getragen, sodann das untere Ende der Signalstange in der aus Fig. 31a erkenntlichen Weise befestigt, das Signal durch Hin- und Herrücken genau centrirt, endlich neben den Fuss jeder Strebestange ein Pfahl geschlagen, und erstere mit diesem durch Nägel verbunden. Hierdurch wird das Signal ziemlich widerstandsfähig. Die Strebestangen können dann noch durch weitere leichtere Stangen gegenseitig verstrebt werden.

Der trigonometrische Punkt selbst wird durch ein vertical in die Erde versenktes Drainrohr unterirdisch vermarkt, und zur leichten Wiederauffindung dieser Marke von festen Punkten, (Grenzsteinen, Häuserecken und dergl.), aus aufgemessen.

§ 14.

Winkelmessung.

Nachdem sämmtliche Signale errichtet sind, wird zur Winkelmessung geschritten. Man unterscheidet Richtungs- und Einzelbeobachtungen. Letztere sind bei Benutzung weniger fein getheilter Instrumente zu empfehlen, während bei besseren Instrumenten die Richtungsbeobachtungen wegen des geringeren Zeitverbrauchs den Vorzug verdienen.

1) **Richtungsbeobachtungen:** Nachdem das Instrument auf dem trigonometrischen Punkte gut centrisch und horizontal aufgestellt worden, wird das Fernrohr auf ein fernes, deutlich sichtbares trigonometrisches Signal scharf eingestellt, die Nonien abgelesen und die Ablesungen in ein geeignetes Formular — (trigon.

Formul. 1 der preussischen Vermessungsanweissung) — eingetragen. Sodann wird die Alhidade, nach Lösung ihrer Bremsschraube, rechts herumgedreht, das Fernrohr auf den folgenden Punkt eingestellt, die Nonien abgelesen etc. In dieser Weise werden nach und nach alle Signale im Kreise herum anvisirt, bis man wieder auf das Anfangssignal gekommen ist, wo man sich durch nochmaliges Ablesen der Nonien von dem unveränderten Stande des Instruments überzeugt. Hierauf wird das Fernrohr durchgeschlagen und die zweite Messung ebenso, jedoch in umgekehrter Reihenfolge der Signale, also durch linkssinnige Drehung der Alhidade, ausgeführt — (wobei die Nonien-Ablesungen in Spalte 6 des trigon. Formul. 1 von unten nach oben notirt werden). — Sobald man wieder auf den Anfangspunkt zurückgekehrt ist, ist die Beobachtung eines Satzes abgeschlossen. In derselben Weise werden die Beobachtungen mehrfach, je nach der erforderten Genauigkeit wiederholt, (in der Regel 3 Sätze), wobei man jedoch zu beachten hat, dass zwischen je zwei Satzbeobachtungen der Limbus gegen die Alhidade etwas zu verschieben ist, so dass also dieselben Winkel jedesmal mit einer anderen Stelle der Kreistheilung gemessen werden, damit die Theilungsfehler des Instrumentes möglichst zur Ausgleichung kommen. Die Verschiebung muss, wenn n Sätze beobachtet werden sollen, jedesmal ca. $\frac{180^\circ}{n}$ betragen, vorausgesetzt, dass das Instrument zwei um 180° von einander entfernte Nonien besitzt.

Nach beendeter Winkelmessung erfolgt die Mittelung der Nonienablesungen, und sodann in der Regel die Reduktion auf die Anfangsrichtung, indem von jedem einzelnen Richtungswinkel die Anfangsrichtung abgezogen wird, so dass diese selbst auf 0° reducirt wird, während die Gradzahlen der übrigen Richtungen unmittelbar die Neigungen gegen die Anfangsrichtung angeben.

2) **Einzelbeobachtungen:** Jeder Winkel wird einzeln, und zwar wie folgt gemessen: Man visirt auf das Signal des linken Schenkels, liest die Nonien ab, löst die Bremsschraube der Alhidade, stellt das Fernrohr auf das Signal des rechten Schenkels ein, löst nun die Bremsschraube des Limbus, während die Alhidade mit dem Limbus fest verbuuden bleibt, führt Limbus sammt Alhidade zurück, und stellt das Fernrohr wieder auf das linke Signal ein.*) Hierauf löst man wieder die Alhidade, geht auf den rechten Schenkel und wiederholt diese Manipulation so oft, als die beabsichtigte Genauigkeit der Winkelmessung dies erfordert. Schliesslich liest man wieder die Nonien ab. Subtrahirt man die Anfangsablesung von der Schlussablesung, dividirt den erhaltenen Rest durch die Anzahl der Repetitionen, so erhält man den gesuchten Winkel. Um beurtheilen zu können, wie viele Vollkreise der Nonien-Nullpunkt bei der Messung durchlaufen hat, ist es nöthig, nach der ersten Repetition eine Controllablesung an einem Nonius zu machen, welche den **einfachen** Winkel roh angiebt. — Die Messung ist nun mit durchgeschlagenem Fernrohr zu wiederholen, doch wird in der zweiten Fernrohrlage nicht **derselbe** Winkel, sondern besser seine Ergänzug zu 360° gemesen, und das gewonnene Resultat von 360° abgezogen. Es geschieht dies, um den Einfluss, welchen eine kleine Drehung des Stativs auf die Winkelmessung ausübt, möglichst auszugleichen.

---

*) Das Zurückführen des Fernrohrs auf das linke Signal geschieht ebenfalls durch **rechts**sinnige Drehung, damit nicht das vielleicht sich etwas mit drehende Stativ sich wieder zurückdreht, um dann bei der Wiederholung der Messung von Neuem eine schädliche Rechtsdrehung ausführen zu können.

§ 15.

Ausgleichung der Winkelbeobachtungen.

1) **Richtungsbeobachtungen.** Die einzelnen, auf die Anfangsrichtung reducirten Sätze werden (im trigon. Formul. 2 der preussischen Vermessungsanweisung) in der aus Beispiel 1 (vergl. das umstehende Formular), ersichtlichen Weise nebeneinander geschrieben und gemittelt, wobei die Mittel für die Richtungen des Hauptnetzes ($\overset{\triangle}{\odot}$) und die des Netzes 2. Ordnung ($\overset{\triangledown}{\odot}$) in der Regel in getrennte Spalten eingetragen werden.

Es kommt bisweilen vor, dass man bei der Beobachtung eines Satzes, z. B. bei plötzlich eintretendem ungünstigen Lichte, ein- oder das andere mal das Signal irgend einer Richtung nicht auffinden kann, so dass in dem betreffenden Satze die betreffende Richtung fehlt, — so im Beispiel Nr. 2 im 3. Satze die Richtung nach $\overset{\triangle}{\odot}$ 7, im 4. Satze nach $\overset{\triangle}{\odot}$ 11. — In solchen Fällen müssten die durch die Mittelung erhaltenen endgültigen Richtungswinkel in den späteren Berechnungen eigentlich mit verschiedenen Gewichten geführt werden, doch sieht man hiervon in der Regel ab, und wählt statt dessen ein anderes Ausgleichungsverfahren. Man bildet nämlich zunächst in gewöhnlicher Weise die Mittel m_1 aus den Richtungsbeobachtungen der einzelnen Sätze, berechnet sodann die Abweichungen der einzelnen Richtungen r_1 vom Mittel, d. h. man bildet die Differenzen $d = m_1 - r_1$, addirt dieselben satzweise und dividirt sie durch die Anzahl der in den betreffenden Sätzen enthaltenen Beobachtungen. Das so für jeden Satz enthaltene Mittel der Differenzen d, $o = \frac{[d]}{n}$ ist als Durchschnittsabweichung der einzelnen Richtungen r_1 des betreffenden Satzes anzusehen. Es wird nun jede einzelne Richtung r_1 um diesen Durchschnittsfehler des betreffenden Satzes verbessert und die so verbesserten Richtungen r_2 $(= r_1 + o)$ wieder in gewöhnlicher Weise gemittelt. Zeigen diese neuen Mittel m_2 gegen die Mittel m_1 wesentliche Differenzen, — was in unserem Beispiele nicht der Fall, — so wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man die Differenzen $d_2 = m_2 - r_2$ bildet etc., wodurch die Mittel m_3 erhalten werden, welche nun, — wenn nicht eine **nochmalige** Wiederholung nothwendig erscheint, als endgültige Richtungswinkel beibehalten werden.*)

2) **Einzelbeobachtungen.** In dem die Regel bildenden Falle der Fig. 152, — gleiche Anfangsrichtung, — bedarf es keiner besonderen Ausgleichung. Im Falle der Fig. 153 wird man die Winkel α des Hauptnetzes auf 360^0, sodann die Winkel $\beta + \gamma$ auf die einzelnen Winkel α auszugleichen haben.

---

*) Zur weiteren Erläuterung des an sich leicht verständlichen Princips dieses Verfahrens diene noch Folgendes. Gesetzt, man habe drei Sätze beobachtet. Die Richtungen der beiden ersten Sätze seien gegen das Mittel im Durchschnitt zu gross, so müssen die des dritten Satzes naturgemäss zu klein sein. Das Plus der beiden ersten Sätze wird durch das Minus im dritten Satze ausgeglichen. Fehlt nun im dritten Satze die Beobachtung für eine Richtung, so fehlt auch das ausgleichende Minus für dieselbe, das Mittel wird nur aus den beiden ersten Sätzen, also zu hoch erhalten. Dieser Fehler wird beseitigt, wenn die Richtungen in den einzelnen Sätzen um ihre Durchschnittsfehler verbessert, also die der ersten beiden Sätze vermindert werden. Hierdurch wird auch das Mittel für die im dritten Satze fehlende Richtung vermindert, während die Mittel für die **übrigen** Richtungen, wegen der gleichzeitigen Erhöhung der Richtungen des dritten Satzes, nahezu ungeändert bleiben.

Trigon. Formular 2 der preussischen Vermessungs-Anweisung.

Bezeichnung der Punkte	Satz 1 °	′	″	Satz 2 °	′	″	Satz 3 °	′	″	Satz 4 °	′	″	Mittel °	′	″	Mittel °	′	″
	Nr. 1 Standpunkt △ 9.																	
													△	△		▽	▽	
△ 10	0	00	00	6	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00			
△ 14	41	00	58	41	00	30	41	00	58	41	00	45	41	00	48			
▽ 8	106	46	00	106	46	20										106	46	10
△ 13	163	48	10	163	47	40	163	48	00	163	47	50	163	47	55			
		35	08		34	30		48	58		48	35		48	43		46	10
	Nr. 2 Standpunkt △ 10.																	
	1. Richtungen r_1												m_1					
△ 4	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00			
△ 7	87	10	40	87	10	32	″	″	″	87	10	18	87	10	30			
△ 8	100	16	00	100	15	50	100	15	50	100	16	43	100	15	51			
△ 11	210	11	55	210	11	35	210	11	30	″	″	″	210	11	40			
△ 13	215	10	25	215	10	20	215	10	20	215	10	15	215	10	20			
		49	00		48	17		37	50		37	16		48	21			
	2. Differenzen $d = m_1 - r_1$																	
△ 4			0			0			00			00						
△ 7		—	10		—	2			″		+	12						
△ 8		—	9		+	1		+	1		+	8						
△ 11		—	15		+	5		+	10			″						
△ 13		—	5			00			00		+	5						
[d]		—	39		+	4		+	11		+	25						
$o = \frac{[d]}{n}$		—	8		+	1		+	3		+	6						
	3. Richtungen $r_2 = r_1 + 0$												m_2					
△ 4	359	59	52	0	00	01	0	00	03	0	00	06	0	00	00			
△ 7	87	10	32	87	10	33	″	″	″	87	10	24	87	10	30			
△ 8	100	15	52	100	15	51	100	15	53	100	16	49	100	15	51			
△ 11	210	11	47	210	11	36	210	11	33	″	″	″	210	11	39			
△ 13	215	10	17	215	10	21	215	10	23	215	10	21	215	10	20			
		48	20		48	22		37	52		37	50		48	20			

§ 16.

Centriren der Winkel.

1) Wenn Kirchthurmspitzen und dergl. als trigonometrische Punkte benutzt werden, so kann man das Instrument nicht centrisch über denselben aufstellen. Man stellt dasselbe dann in einiger Entfernung **neben** das Centrum der Station, z. B. in S, Fig. 32, und beobachtet statt der Richtungen α_{c_1}, α_{c_2} . . etc. die Richtungen α_{s_1}, α_{s_2} . . etc. Um aus letzteren die Richtungen α_c zu erhalten, hat man den Richtungen α_{s_1}, α_{s_2} . . . etc. bezüglich die Winkel δ_1, δ_2 . . . etc. zuzulegen. Es ist also, wie eine durch C zu S P_1 gezogene Parallele sofort erkennen lässt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{c_1} &= \alpha_{s_1} + \delta_1 \\ \alpha_{c_2} &= \alpha_{s_2} + \delta_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{98a}$$

Zur Berechnung der Winkel δ_1, δ_2 . . . hat man, wenn e die Excentricität, d. h. die Entfernung C S, ε_1, ε_2 . . . die Winkel, welche die Verbindende C S mit den Dreiecksseiten S P_1, S P_2 . . . einschliesst, und s_1, s_2 s_3 etc. die Längen P_1 C, P_2 C . . . etc. bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta_1 &= e\,\frac{\sin\varepsilon_1}{s_1} \\ \sin\delta_2 &= e\,\frac{\sin\varepsilon_2}{s_2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Die Längen s erhält man genau genug durch eine vorläufige Dreiecksberechnung, z. B. der Dreiecke P_1 P_2 C etc., in welchen jedesmal nur der Winkel bei C noch unbekannt ist, wenn, wie wir voraussetzen, die Beobachtungen auf sämmtlichen Dreieckspunkten, also auch auf P_1, P_2 . . . bereits stattgefunden haben. Der Winkel bei C ergiebt sich dann als Supplement der beiden anderen Winkel. Die Grössen e und ε müssen durch Messung bestimmt werden.

Da die Winkel δ in der Regel sehr klein sind, so kann man statt des $\sin\delta$ den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen δ selbst setzen und hat dann nach (98a) $\delta = e\,\frac{\sin\varepsilon}{s}$, oder um δ in Sekunden zu erhalten, nach Thl. I, § 32, 1)

$$\delta'' = \varrho''\,e\,\frac{\sin\varepsilon}{s} \text{*)} \tag{99}$$

Nach (47) ist, wenn man alle Glieder, welche x in höherer als der 3. Potenz enthalten, vernachlässigt,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}.$$

Der bei Anwendung der Näherungsformel (99) begangene Fehler ist also gleich $\frac{\delta^3}{6}$. Soll derselbe den Werth 0,5″, d. h. in analytischem Masse $\frac{0{,}5}{\varrho''} = 0{,}000025$ nicht überschreiten, so ergiebt sich als Grenzwerth für δ

$$\frac{\delta^3}{6} = 0{,}0000025$$

$$\delta = \sqrt[3]{0{,}000015} = \frac{1}{41}.$$

---

*) Es sind dies die im trigon. Formul. 4 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung kommenden Formeln.

Steht die Strecke e senkrecht zur Strecke s, so ist $\frac{e}{s}$ annähernd das analytische Mass für den Winkel δ. Man wird daher die Formel (99) nur anwenden, wenn das Verhältniss e : s den Werth $\frac{1}{41}$ nicht übersteigt, kann dann aber versichert sein, dass im **ungünstigsten** Falle, (wenn nämlich e senkrecht zu s steht), der begangene Fehler nicht den Werth 0,5″ übersteigt.

2) Die obenentwickelten Formeln finden auch Anwendung, wenn nicht das Instrument auf der Beobachtungsstation, sondern das Signal eines Zielpunktes excentrisch steht. Hier handelt es sich indessen meistens um sehr geringe Excentricität, welche durch schiefen Stand des Signals verursacht wird. Man hat dann die Signalspitze genau auf die Erdoberfläche zu projiciren und kann hierauf am einfachsten wie folgt verfahren: Man trägt die im Centrum der betreffenden Station nach den umliegenden Punkten beobachteten Richtungen mittelst eines Transporteurs auf, Fig. 33, trägt die in ihrer Lage zum Centrum C genau eingemessene projicirte Signalspitze S unter Anwendung eines grossen Massstabs (etwa 1 : 5) in die Figur ein, fällt von S auf die einzelnen Richtungsstrahlen Lothe, h_1, h_2 etc. und erhält die Winkel δ_1., δ_2 . . . in analytischem Masse $= \frac{h_1}{s_1}, \frac{h_2}{s_2} \ldots$, oder wenn h in cm, s in m ausgedrückt ist $= \frac{h_1}{100\,s_1}, \frac{h_2}{100\,s_2}$, also in Sekunden, wenn man $\frac{\varrho''}{100} = k$ setzt, $= h_1 \frac{k}{s}, h_2 \frac{k}{s} \ldots$, worin die Grössen $\frac{k}{s}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

3) Die Excentricität e in den Formeln (98) und (99) wird man in den seltensten Fällen **direkt** messen können. Man misst dann eine Basis, deren Anfangspunkt in S liegt, und deren Endpunkt A heissen möge, und beobachtet die Winkel A S C und S A C, wodurch S C = e bekannt wird. — Liegt S auf der Gallerie eines Thurmes, dessen Spitze Stationscentrum ist, so kann man weder eine Basis S A noch den Winkel A S C messen. In diesem und ähnlichen Fällen wählt man eine Basis A B = g, Fig. 34, beobachtet von S nach A und B und von A und B nach C und S, dann ist zunächst:

$$\varepsilon = \angle P_0\,S\,B - \psi$$

und es kommt nun darauf an, $\angle \psi$ und die Excentricität e zu berechnen. Es ist:

$$\operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{a + b}{a - b}$$

$$a = g \frac{\sin \gamma_s}{\sin (\beta_s + \gamma_s)}$$

$$b = g \frac{\sin \gamma_c}{\sin (\beta_c + \gamma_c)}$$

oder unter Einführung kürzerer Zeichen:

$$\mathfrak{a} = g\, m_s$$

$$\mathfrak{b} = g\, m_c$$

daher

$$\operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{m_c + m_s}{m_c - m_s}$$

$$= \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{\frac{m_c}{m_s} + 1}{\frac{m_c}{m_s} - 1}$$

oder für $\frac{m_c}{m_s} = \text{tang}\,\mu$:

$$\text{tang}\,{}^1/_2\,(\varphi - \psi) = \text{tang}\,{}^1/_2\,(\varphi + \psi)\,\frac{\text{tang}\,\mu + 1}{\text{tang}\,\mu - 1}$$

$$= \text{tang}\,{}^1/_2\,(\varphi + \psi)\,\frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{4} + \text{tang}\,\mu}{\text{tang}\,\frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,\mu - 1}$$

oder

$$\textbf{tang}\,{}^1/_2\,(\varphi - \psi) = \textbf{tang}\,{}^1/_2\,(\varphi + \psi)\,\textbf{cot}\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right). \tag{100)*}$$

Da auch $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} - \beta$ bekannt, so können nunmehr φ und ψ gefunden werden.

Zur Berechnung von C S = e hat man dann:

$$e = \frac{a \sin \beta}{\sin \varphi} \text{ und } e = \frac{b \sin \beta}{\sin \psi}$$

oder

$$e = \frac{m_s}{\sin \varphi}\,g \sin \beta, \text{ und } e = \frac{m_c}{\sin \psi}\,g \sin \beta. \tag{101)*}$$

§ 17.

Netz-Ausgleichung.

Wir haben im § 10 andeutungsweise die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes nach der Methode der kl. Quadrate behandelt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie werden wir uns indessen mit einer weniger strengen Methode begnügen können, welche hier noch besprochen werden soll. Die Winkel des Netzes Fig. 29 haben, wie wir gesehen haben, folgenden Bedingungen zu genügen:

1) in jedem der Dreiecke I—V muss die Summe der drei Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ 180° betragen.

2) die Summe der Winkel β muss 360° betragen.

3) es muss der Gleichung genügt werden

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \ldots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 - \log \sin \gamma_2 - \ldots - \log \sin \gamma_n = 0.$$

Bezeichnen nun:

a) $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ die Widersprüche gegen die Bedingungen zu 1)

b) (1), (2), (3), . . . (n) die danach jedem einzelnen Winkel in den Dreiecken I, II, III . . . n beizulegenden Verbesserungen,

c) f_s den Fehler der Winkelsumme $[\beta]$ gegen den Sollwerth 360°,

d) (s) die danach jedem Winkel β beizulegende Verbesserung, so muss zunächst sein:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned} &3\,(1) + (s) - f_1 = 0 \\ &3\,(2) + (s) - f_2 = 0 \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &3\,(n) + (s) - f_n = 0. \end{aligned}\right.$$

$$\text{II} \quad n\,(s) + (1) + (2) + \ldots + (n) = 0$$

*) Die Formeln (100) und (101) kommen im trigon. Formul. 3 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung.

denn auf die Winkel β_1, β_2 . . . treffen neben den Verbesserungen (s) noch bezüglich die Verbesserungen (1), (2) . . . (n).

Multipliciren wir Gleichung II mit 3, so erhalten wir:

$$1)\ 3\,n\,(s) + 3\,[(1) + (2) + \ldots + (n)] - 3\,f_s = 0$$

und durch Addition der Gleichungen I

$$2)\ 3\,[(1) + (2) + \ldots + (n)] + n\,(s) - [f] = 0$$

und wenn wir 1) von 2) subtrahiren:

$$2\,n\,(s) - 3\,f_s + [f] = 0$$

also

$$(s) = \frac{-[f] + 3\,f_s}{2\,n} \tag{102}$$

worauf wir für die Verbesserungen (1), (2), (3) . . . (n) aus den Gleichungen I erhalten

$$\left.\begin{aligned} (1) &= \tfrac{1}{3}\,(f_1 - (s)) \\ (2) &= \tfrac{1}{3}\,(f_2 - (s)) \\ &\ \ \vdots \\ (n) &= \tfrac{1}{3}\,(f_n - (s)). \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Von diesen Verbesserungen fallen auf die Winkel β bezüglich die Verbesserungen (1) + (s), (2) + (s) . . . (n) + (s), während die Winkel α und γ im Dreieck I die Verbesserungen (1), im Dreieck II die Verbesserungen (2) etc. erhalten. — Weiter haben nun aber die Winkel α und γ noch der Bedingung 3) zu genügen, wonach:

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \ldots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 \ldots - \log \gamma_n = 0.$$

Der gegen diese Bedingung sich ergebende Widerspruch sei φ, die den einzelnen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ zufallende Verbesserung sei v'', und seien $d\,\alpha_1$, $d\,\alpha_2, \ldots d\,\gamma_1$, $d\,\gamma_2 \ldots$ die Aenderungen, welche die Logarithmen der Sinus erleiden, wenn die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ um 1'' geändert werden, so sind die Aenderungen der Sinus bei einer Aenderung der Winkel um $v'' = d\,\alpha_1\,v''$, $d\,\alpha_2\,v''$ etc., und es muss sein:

$$v''\,(d\,\alpha_1 + d\,\alpha_2 + \ldots d\,\alpha_n - d\,\gamma_1 - d\,\gamma_2 - \ldots d\,\gamma_n) = \varphi$$

also

$$v'' = \frac{\varphi}{[d]}. \tag{104}$$

Die Coofficienten $d\,\alpha$ und $d\,\gamma$ sind aus den Logarithmentafeln als Tafeldifferenz gleichzeitig mit den Logarithmen der Sinus zu entnehmen. Dieselben sind für die Winkel γ mit negativem Vorzeichen einzuführen. Demnach werden auch die Verbesserungen der Winkel γ das **entgegengesetzte** Vorzeichen der den Winkeln α zufallenden Verbesserungen erhalten, so dass die durch die Verbesserungen (103) erfüllten Bedingungen zu 1) durch die neuen Verbesserungen v nicht gestört werden, ebensowenig wie die durch (102) erfüllte Bedingung zu 2), da die Winkel β durch die Verbesserungen v überhaupt nicht berührt werden.

Hat man v berechnet, so ergeben sich die Verbesserungen der Logarithmen der Sinus gleich $v\,d\,\alpha_1$, $v\,d\,\alpha_2$ . . . etc. Diese Logarithmen brauchen also für die verbesserten Winkel zum Zwecke der nunmehr erfolgenden Berechnung der Dreiecksseiten nicht nochmals aufgeschlagen zu werden.

Auf den Fall der Fig. 28 lassen sich, wie bereits im § 11 angedeutet wurde, dieselben Formeln anwenden, doch verdient für diesen Fall das Verfahren des § 26 den Vorzug.