Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 11. Triangulirung

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

2) **Der mittlere Fehler** der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \tag{96}$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \text{ etc.} \tag{97}$$

3) Beispiel.*) Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$l_1 = 62^0\ 37'\ 24''$ und sei das Gewicht $p_1 = 16$
$l_2 = 48^0\ 47'\ 46''$ „ „ „ „ $p_2 = 25$
$l_3 = 68^0\ 34'\ 35''$ „ „ „ „ $p_3 = 36$
Sa. $179^0\ 59'\ 45''$
$w = -15''$

Die Fehlergleichung lautet: $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0$.
Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1, \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1, \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = +15''$$

also $$k_1 = \frac{1500}{13}$$

somit $$v_1 = \frac{1500}{13\,.\,16} = +7{,}2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13\,.\,25} = +4{,}6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13\,.\,36} = +3{,}2''$$

Sa. $+15'' = -w$.

Man erkennt, dass die Verbesserungen v den Gewichten p umgekehrt proportional sind.

III. Trigonometrische Messungen.

A. Dreiecksnetz.

§ 11.

Triangulirung.**)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

**) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschritten sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39—40 Kenntniss zu nehmen.

rückzuführen ist, erkennt man sofort, wenn man sich den Punkt D so verschoben denkt, dass er innerhalb des Dreiecks A B C zu liegen kommt), — doch wird man, so weit es sich um Zwecke der niederen Geodäsie handelt, im Allgemeinen diese verhältnissmässig bedeutende Rechenarbeit vermeiden, und zu einem anderen Ausgleichungsverfahren seine Zuflucht nehmen, (vergl. § 17), welches eben die möglichst einfache Gestaltung des Netzes erfordert. Hat man ein solches Netz entworfen, so ist es alsdann leicht, dasselbe durch Einschaltung weiterer Dreieckspunkte nach einer der in den nächsten Paragraphen zu erörternden Methoden nach Belieben zu ergänzen, und grade dieser Umstand macht es möglich, auch da, wo eine sehr dichte Lage der Dreieckspunkte nothwendig erscheint, (vergl. Fig. 30), dem Netze der Hauptdreiecke dennoch eine einfache Gestalt zu geben. Da die Dreiecksseiten des Hauptnetzes (Netz 1. Ordnung), eine beliebig grosse Länge haben können, so wird es häufig möglich sein, das ganze Gebiet mit einem einzigen Dreiecke zu überspannen, und dieses als Hauptdreiecksnetz anzusehen, indessen ist der Form der Fig. 28 der Vorzug zu geben, in welcher auf einer gemeinschaftlichen Basis **zwei** Dreiecke, A B C und A B D, stehen, deren Spitzen C und D durch gegenseitige Visur verbunden sind, wodurch es möglich wird, die Punkte C und D nach § 26 zu behandeln, d. h. ihre infolge der unvermeidlichen Fehler etwas fehlerhafte Lage durch gegenseitige Wechselverbesserungen zu berichtigen. Wo es nicht möglich ist, das ganze Messungsgebiet mit einem so einfachen Netze wenigstens annähernd zu überspannen, wird sich das Dreiecksnetz doch wenigstens aus Theilen von der Form der Fig. 28 oder ähnlicher einfacher Formen zusammensetzen lassen, wie das Hauptdreiecksnetz in Fig. 30.

Die Winkel des Hauptnetzes sind mit möglichster Schärfe zu messen, während die Winkel des Netzes niederer Ordnung, (in Fig. 30 punktirt dargestellt), eine geringere Genauigkeit beanspruchen. Ausser den Winkeln des gesammten Netzes misst man ferner die Neigung irgend einer Dreiecksseite, z. B. A B*) gegen den Meridian, welchen man als Abscissenaxe des Coordinatensystems, für welches später die Coordinaten der Netzpunkte zu berechnen sind, ansieht. Endlich ist noch eine in ebenem Terrain gelegene Dreiecksseite, z. B. C D, (Basis), oder besser mehrere solcher Basen zu messen, worauf alle zur Berechnung des Netzes nöthigen Elemente bekannt sind.

Behufs Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte verschafft man sich nun zunächst einen angenäherten Werth der Seite A F des Hauptnetzes, indem man von der bekannten Basis C D ausgehend nacheinander die Dreiecke C D E, C E A und C A F berechnet. Dass der gefundene Werth für A F wegen der sich häufenden Fehler nur ein angenäherter ist, kümmert uns **vorläufig** nicht.

Ist nun A der Nullpunkt des Coordinatensystems, so sind seine Coordinaten $= 0$. Die Coordinaten des Punktes F finden wir nach (11)

$$y_F = AF \sin \nu_A^F \text{ und } x_F = AF \cos \nu_A^F$$

somit sind die Coordinaten zweier Punkte des Hauptnetzes bekannt**), worauf die

*) Ist die Neigung einer Strecke A B auf Punkt A gemessen, so bezeichnet man sie mit ν_A^B, ist sie auf B gemessen, mit ν_B^A. Beide Neigungen differiren, wie man aus Fig. 30 leicht erkennt, um 180^0.

**) Hätte das Hauptnetz die Form der Fig. 29, so würde man die Winkel desselben nach § 17 auszugleichen und sämmtliche Dreiecksseiten zu berechnen haben, worauf die Coordinaten der Netzpunkte nach §§ 39—40 gefunden werden können. Wegen der vollständigen Ausgleichung der Winkel des Netzes können Schlussfehler sich nicht ergeben. Der § 41 findet hier somit keine Anwendung.

Punkte C und E, B und G nach § 26 gefunden werden können. Nunmehr wird zur Coordinatenberechnung des Netzes zweiter Ordnung geschritten, welche nach § 18—26 zu erfolgen hat.

Nachdem wir so sämmtliche Coordinaten der Netzpunkte ermittelt, haben wir uns zu erinnern, dass der ganzen Rechnung nur ein **angenäherter** Werth der Basis A F zu Grunde liegt. Wir sind nun aber im Stande, aus den Coordinaten der Endpunkte der gemessenen Basen deren Längen herzuleiten*) und mit den durch direkte Messung gefundenen Werthen derselben zu vergleichen. Seien die **gemessenen** Längen der Basen l, l_2, $l_3 \ldots$, die aus den Coordinaten berechneten Längen correspondierend $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$, so ist, wenn man das Verhältniss $l_1 : \lambda_1 = q_1$, $l_2 : \lambda_2 = q_2$ etc. setzt: $l_1 = q_1 \lambda_1$, $l_2 = q_2 \lambda_2$ etc. Es bedeuten also die Werthe q diejenigen Zahlen, mit welchen man die aus den Coordinaten abgeleiteten Werthe zu multipliciren hat, um die gemessenen, genaueren Werthe l zu erhalten. Man bildet nun aus den einzelnen q das arithmetische Mittel

$$Q = \frac{q_1 + q_2 + \ldots q_n}{n}$$

welches der Eins natürlich sehr nahe kommen wird, und multiplicirt mit Q die berechneten Coordinaten sämmtlicher trigonometrischen Punkte des Netzes.

§ 12.

Vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke.

In einem Dreiecke sei die Seite a und die Winkel α, β, γ gemessen, die Seiten b und c sind zu berechnen. Wenn nun die gemessenen Grössen kleine Fehler, $d\,a$, $d\,\alpha$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$ enthalten, wie gross sind die Fehler, welche dadurch in den Seiten b und c entstehen?

Es ist $$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\log b = \log a + \log\sin\beta - \log\sin\alpha$$
$$\log c = \log a + \log\sin\gamma - \log\sin\alpha$$

also wenn wir differentiiren, nach (37)

$$\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a} + \frac{d\,\sin\beta}{\sin\beta} - \frac{d\,\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\frac{d\,c}{c} = \frac{d\,a}{a} + \frac{d\,\sin\gamma}{\sin\gamma} - \frac{d\,\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

oder nach (39): 1) $$\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a} + d\,\beta\cot\beta - d\,\alpha\cot\alpha$$

2) $$\frac{d\,c}{c} = \frac{d\,a}{a} + d\,\gamma\cot\gamma - d\,\alpha\cot\alpha.$$

Sollen nun die in den einzelnen Dreiecksseiten entstehenden Fehler den Seiten selbst proportional, soll also z. B. $\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,a}{a}$ sein, so muss nach Gleichung 1) $d\,\beta\cot\beta - d\,\alpha\cot\alpha = 0$ werden. Sind die Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen, so dass die Winkelfehler als gleich angenommen werden können, also $d\,\alpha = \pm d\,\beta$, so muss demnach $\cot\beta = \pm\cot\alpha$ sein, also entweder $\beta = \alpha$ oder $\beta = 180 - \alpha$. **Beiden**

*) Damit diese Rechnungen möglichst zutreffende Resultate liefern, müssen die Basen zwischen zwei gut bestimmten Punkten gewählt werden.