Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 16. Centriren der Winkel

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

§ 16.

Centriren der Winkel.

1) Wenn Kirchthurmspitzen und dergl. als trigonometrische Punkte benutzt werden, so kann man das Instrument nicht centrisch über denselben aufstellen. Man stellt dasselbe dann in einiger Entfernung **neben** das Centrum der Station, z. B. in S, Fig. 32, und beobachtet statt der Richtungen α_{c_1}, α_{c_2} . . etc. die Richtungen α_{s_1}, α_{s_2} . . etc. Um aus letzteren die Richtungen α_c zu erhalten, hat man den Richtungen α_{s_1}, α_{s_2} . . . etc. bezüglich die Winkel δ_1, δ_2 . . . etc. zuzulegen. Es ist also, wie eine durch C zu S P_1 gezogene Parallele sofort erkennen lässt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{c_1} &= \alpha_{s_1} + \delta_1 \\ \alpha_{c_2} &= \alpha_{s_2} + \delta_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (98a)$$

Zur Berechnung der Winkel δ_1, δ_2 . . . hat man, wenn e die Excentricität, d. h. die Entfernung C S, ε_1, ε_2 . . . die Winkel, welche die Verbindende C S mit den Dreiecksseiten S P_1, S P_2 . . . einschliesst, und s_1, s_2 s_3 etc. die Längen P_1 C, P_2 C . . . etc. bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta_1 &= e\,\frac{\sin\varepsilon_1}{s_1} \\ \sin\delta_2 &= e\,\frac{\sin\varepsilon_2}{s_2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Die Längen s erhält man genau genug durch eine vorläufige Dreiecksberechnung, z. B. der Dreiecke P_1 P_2 C etc., in welchen jedesmal nur der Winkel bei C noch unbekannt ist, wenn, wie wir voraussetzen, die Beobachtungen auf sämmtlichen Dreieckspunkten, also auch auf P_1, P_2 . . . bereits stattgefunden haben. Der Winkel bei C ergiebt sich dann als Supplement der beiden anderen Winkel. Die Grössen e und ε müssen durch Messung bestimmt werden.

Da die Winkel δ in der Regel sehr klein sind, so kann man statt des sin δ den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen δ selbst setzen und hat dann nach (98a) $\delta = e\,\frac{\sin\varepsilon}{s}$, oder um δ in Sekunden zu erhalten, nach Thl. I, § 32, 1)

$$\delta'' = \varrho''\, e\,\frac{\sin\varepsilon}{s} \text{ *)} \qquad (99)$$

Nach (47) ist, wenn man alle Glieder, welche x in höherer als der 3. Potenz enthalten, vernachlässigt,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}.$$

Der bei Anwendung der Näherungsformel (99) begangene Fehler ist also gleich $\frac{\delta^3}{6}$. Soll derselbe den Werth 0,5″, d. h. in analytischem Masse $\frac{0,5}{\varrho''} = 0,000025$ nicht überschreiten, so ergiebt sich als Grenzwerth für δ

$$\frac{\delta^3}{6} = 0,0000025$$

$$\delta = \sqrt[3]{0,000015} = \frac{1}{41}.$$

---

*) Es sind dies die im trigon. Formul. 4 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung kommenden Formeln.

Steht die Strecke e senkrecht zur Strecke s, so ist $\frac{e}{s}$ annähernd das analytische Mass für den Winkel δ. Man wird daher die Formel (99) nur anwenden, wenn das Verhältniss e : s den Werth $\frac{1}{41}$ nicht übersteigt, kann dann aber versichert sein, dass im **ungünstigsten** Falle, (wenn nämlich e senkrecht zu s steht), der begangene Fehler nicht den Werth 0,5″ übersteigt.

2) Die obenentwickelten Formeln finden auch Anwendung, wenn nicht das Instrument auf der Beobachtungsstation, sondern das Signal eines Zielpunktes excentrisch steht. Hier handelt es sich indessen meistens um sehr geringe Excentricität, welche durch schiefen Stand des Signals verursacht wird. Man hat dann die Signalspitze genau auf die Erdoberfläche zu projiciren und kann hierauf am einfachsten wie folgt verfahren: Man trägt die im Centrum der betreffenden Station nach den umliegenden Punkten beobachteten Richtungen mittelst eines Transporteurs auf, Fig. 33, trägt die in ihrer Lage zum Centrum C genau eingemessene projicirte Signalspitze S unter Anwendung eines grossen Massstabs (etwa 1 : 5) in die Figur ein, fällt von S auf die einzelnen Richtungsstrahlen Lothe, h_1, h_2 etc. und erhält die Winkel δ_1., δ_2 . . . in analytischem Masse $= \frac{h_1}{s_1}, \frac{h_2}{s_2} \ldots$, oder wenn h in cm, s in m ausgedrückt ist $= \frac{h_1}{100\, s_1}, \frac{h_2}{100\, s_2}$, also in Sekunden, wenn man $\frac{\varrho''}{100} = k$ setzt, $= h_1 \frac{k}{s}, h_2 \frac{k}{s} \ldots$, worin die Grössen $\frac{k}{s}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

3) Die Excentricität e in den Formeln (98) und (99) wird man in den seltensten Fällen **direkt** messen können. Man misst dann eine Basis, deren Anfangspunkt in S liegt, und deren Endpunkt A heissen möge, und beobachtet die Winkel A S C und S A C, wodurch S C = e bekannt wird. — Liegt S auf der Gallerie eines Thurmes, dessen Spitze Stationscentrum ist, so kann man weder eine Basis S A noch den Winkel A S C messen. In diesem und ähnlichen Fällen wählt man eine Basis A B = g, Fig. 34, beobachtet von S nach A und B und von A und B nach C und S, dann ist zunächst:

$$\varepsilon = \angle P_0\, S B - \psi$$

und es kommt nun darauf an, $\angle \psi$ und die Excentricität e zu berechnen. Es ist:

$$\operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{a + b}{a - b}$$

$$a = g \frac{\sin \gamma_s}{\sin (\beta_s + \gamma_s)}$$

$$b = g \frac{\sin \gamma_c}{\sin (\beta_c + \gamma_c)}$$

oder unter Einführung kürzerer Zeichen:

$$\mathbf{a = g\, m_s}$$

$$\mathbf{b = g\, m_c}$$

daher

$$\operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{m_c + m_s}{m_c - m_s}$$

$$= \operatorname{tang} {}^1/_2 (\varphi + \psi) \frac{\frac{m_c}{m_s} + 1}{\frac{m_c}{m_s} - 1}$$

oder für $\frac{m_c}{m_s} = \mathbf{tang}\,\mu$:

$$\operatorname{tang} {}^1/_2\, (\varphi - \psi) = \operatorname{tang} {}^1/_2\, (\varphi + \psi) \frac{\operatorname{tang}\mu + 1}{\operatorname{tang}\mu - 1}$$

$$= \operatorname{tang} {}^1/_2\, (\varphi + \psi) \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tang}\mu}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\mu - 1}$$

oder $$\mathbf{tang}\, {}^1/_2\, (\varphi - \psi) = \mathbf{tang}\, {}^1/_2\, (\varphi + \psi) \mathbf{cot} \left(\frac{\pi}{4} - \mu\right). \qquad (100)^*)$$

Da auch $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} - \beta$ bekannt, so können nunmehr φ und ψ gefunden werden.

Zur Berechnung von $CS = e$ hat man dann:

$$e = \frac{a \sin\beta}{\sin\varphi} \text{ und } e = \frac{b \sin\beta}{\sin\psi}$$

oder $$\mathbf{e} = \frac{m_s}{\sin\varphi} \mathbf{g} \sin\beta, \text{ und } \mathbf{e} = \frac{m_c}{\sin\psi} \mathbf{g} \sin\beta. \qquad (101)^*)$$

§ 17.

Netz-Ausgleichung.

Wir haben im § 10 andeutungsweise die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes nach der Methode der kl. Quadrate behandelt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie werden wir uns indessen mit einer weniger strengen Methode begnügen können, welche hier noch besprochen werden soll. Die Winkel des Netzes Fig. 29 haben, wie wir gesehen haben, folgenden Bedingungen zu genügen:

1) in jedem der Dreiecke I—V muss die Summe der drei Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ 180^0 betragen.

2) die Summe der Winkel β muss 360^0 betragen.

3) es muss der Gleichung genügt werden

$$\log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_2 + \ldots + \log\sin\alpha_n - \log\sin\gamma_1 - \log\sin\gamma_2 - \ldots - \log\sin\gamma_n = 0.$$

Bezeichnen nun:

a) $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ die Widersprüche gegen die Bedingungen zu 1)

b) (1), (2), (3), . . . (n) die danach jedem einzelnen Winkel in den Dreiecken I, II, III . . . n beizulegenden Verbesserungen,

c) f_s den Fehler der Winkelsumme $[\beta]$ gegen den Sollwerth 360^0,

d) (s) die danach jedem Winkel β beizulegende Verbesserung, so muss zunächst sein:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} 3\,(1) + (s) - f_1 = 0 \\ 3\,(2) + (s) - f_2 = 0 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ 3\,(n) + (s) - f_n = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{II} \qquad n\,(s) + (1) + (2) + \ldots + (n) = 0$$

*) Die Formeln (100) und (101) kommen im trigon. Formul. 3 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung.