Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

B. Trigonometrische Punkteinschaltung.

B. Trigonometrische Punkteinschaltung.

§ 18.

Methoden der Punktbestimmung.

Die trigonometrische Punktbestimmung durch Punkteinschaltung setzt voraus, dass bereits andere trigonometrische Punkte, welche als **gegebene** Punkte bezeichnet werden, ihrer Lage nach, also durch ihre Coordinaten bekannt seien. Soll ein neuer Punkt in das Netz der gegebenen Punkte eingeschaltet werden, so geschieht dies nach einer der folgenden Methoden:

a) Vorwärtseinschneiden: Die Bestimmung erfolgt lediglich durch Winkelmessung auf **gegebenen** Punkten, und zwar werden auf diesen die Richtungen nach den neuzubestimmenden Punkten hin, sowie auch solche nach anderen gegebenen Punkten beobachtet. Diesen Fall stellt Fig. 35 dar, in welcher $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 den neuzubestimmenden Punkt bezeichnet. Dass einzelne der in dieser Figur dargestellten Richtungen, z. B. $\overset{\triangle}{\odot}$ 3—$\overset{\triangle}{\odot}$ 4, zur Hälfte punktirt, zur Hälfte voll ausgezogen sind, bedeutet, dass diese Richtungen nur **einseitig** beobachtet wurden, d. h. es ist z. B. auf $\overset{\triangle}{\odot}$ 3 die Richtung nach $\overset{\triangle}{\odot}$ 4, nicht aber umgekehrt auf $\overset{\triangle}{\odot}$ 4 die Richtung nach $\overset{\triangle}{\odot}$ 3 beobachtet. Danach lehrt ein Blick auf die Figur, dass auf dem neuzubestimmenden Punkte überhaupt keine Beobachtungen ausgeführt sind.

Man erkennt nun sofort, dass zur Bestimmung des Punktes $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 die Beobachtungen auf 2 gegebenen Punkten genügen würden, z. B. die Beobachtungen auf $\overset{\triangle}{\odot}$ 1 und $\overset{\triangle}{\odot}$ 2, denn es sind dadurch die Richtungen $\overset{\triangle}{\odot}$ 1—$\overset{\nabla}{\odot}$ 5 und $\overset{\triangle}{\odot}$ 2—$\overset{\nabla}{\odot}$ 5, also 2 geometrische Oerter für $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 bekannt, allein, man hat durch blosse Messung der beiden Winkel an der Basis $\overset{\triangle}{\odot}$ 1—$\overset{\triangle}{\odot}$ 2 des Dreiecks $\overset{\triangle}{\odot}$ 1 $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 $\overset{\triangle}{\odot}$ 2 weder eine Controlle für die Winkelmessung, noch für die richtige Bestimmung der beiden **gegebenen** Punkte. Fehler in diesen Bestimmungselementen stellen sich erst durch Beobachtung **überschüssiger** Richtungen heraus, wie sie die Figur nachweist.

Weitere überschüssige Richtungen würde man erhalten haben, wenn man auch auf $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 die Richtungen nach gegebenen Punkten hin*) gemessen hätte. Um diesen Fall des **combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens** in unserer Figur darzustellen, würden wir die auf $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 beobachteten Richtungen **voll** auszuziehen haben.

b) Rückwärtseinschneiden. Es werden nur auf dem zu bestimmenden Punkte $\overset{\nabla}{\odot}$ 5, Fig. 36, die Richtungen nach gegebenen Punkten beobachtet. Hätte man nur **zwei** Richtungen, z. B. $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 — $\overset{\triangle}{\odot}$ 1 und $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 — $\overset{\triangle}{\odot}$ 2, d. h. den Winkel α gemessen, so hätte man erst **einen** geometrischen Ort für $\overset{\nabla}{\odot}$ 5, nämlich die Peripherie des den Winkel α als Peripheriewinkel umfassenden durch $\overset{\triangle}{\odot}$ 1 und $\overset{\triangle}{\odot}$ 2 gelegten Kreises. Man braucht also zur Bestimmung von $\overset{\nabla}{\odot}$ 5 noch mindestens eine 3te Richtung. Im Falle unserer Figur ist also nur **eine** überschüssige, fehleraufklärende und eine Ausgleichung derselben ermöglichende Beobachtung vorhanden.

c) Combinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Die Beobachtung erfolgt sowohl auf den gegebenen, als auch auf dem zu bestimmenden Punkte. — Vergl. den Schluss zu a).

Weitere Methoden, durch welche mehrere Punkte **gleichzeitig** eingeschaltet werden, die aber bezüglich der Güte der zu erzielenden Resultate den oben er-

*) Sogen. Rückwärtsrichtungen, im Gegensatz zu den auf den **gegebenen** Punkten beobachteten Vorwärtsrichtungen.

läuterten Methoden nachstehen, das sogen. **Einschalten** und **Einketten**, werden wir in den Paragraphen 28 und 29 kennen lernen.

§ 19.

Berechnung der Neigungen.*)

Unter der **Neigung** einer trigonometrischen Linie verstehen wir denjenigen Winkel, welchen diese Linie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, und zwar von dieser aus **rechts** herum zählend. Die Neigung einer Linie, $P_a\, P_b$, Fig. 37, kann in P_a oder in P_b gemessen sein, und wird im Folgenden im ersteren Falle mit ν_a^b, im letzteren Falle mit ν_b^a bezeichnet. Es leuchtet ein, dass beide Neigungen um 180^0 verschieden sind.

Wendet man bei trigonometrischer Punkteinschaltung die Methode des Vorwärts- oder des combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens an, so ist, wie wir später sehen werden, (§ 20), die Kenntniss der Neigungen aller derjenigen Linien zwischen **gegebenen** Punkten erforderlich, für welche Richtungsbeobachtungen vorliegen. Diese müssen also vorher abgeleitet werden.

Sind y_a nnd x_a, y_b und x_b die Coordinaten der Punkte P_a und P_b, Fig. 37, und setzt man $y_b - y_a = \triangle y$, $x_b - x_a = \triangle x$, so ist

$$\operatorname{tang} \nu_a^b = \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{105}$$

Zur Controlle bestimmt man die Neigung noch aus einer zweiten Formel. Bekanntlich ist:

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}$$

also

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \nu\right) = \frac{\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \nu} = \frac{1 + \operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang} \nu}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \nu\right) = \frac{1 + \frac{\triangle y}{\triangle x}}{1 - \frac{\triangle y}{\triangle x}} = \frac{\triangle x + \triangle y}{\triangle x - \triangle y}. \tag{106}$$

§ 20.

Orientirung der beobachteten Richtungen.

Sind die Neigungen ν der trigonometrischen Linien zwischen den **gegebenen** Punkten nach vorigem § ermittelt, so lassen sich aus diesen und den nach neu zu bestimmenden Punkten ausgeführten Richtungsbeobachtungen die noch unbekannten Neigungen φ derjenigen trigonometrischen Linien bestimmen, welche die **gegebenen** Punkte mit den **zu bestimmenden** Punkten verbinden.

Sind auf dem Punkte P, Fig. 38, die Richtungen α_1, α_2, α_3 nach den gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, und die Richtung α_4 nach dem neu zu bestimmenden

*) Trigonom. Formul. 8 der pr. Verm.-Anw.

Punkte P_4 beobachtet, so findet man die Neigung φ_4 der trigonometrischen Linie $P - P_4$

$$\varphi_4 = o_0 + \alpha_4 \tag{107}$$

worin 0_0, (Orientirungswinkel), die Neigung der Nullrichtung, (Anfangsrichtung), α_0 bezeichnet. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} o_0 &= \nu_1 - \alpha_1 \\ o_0 &= \nu_2 - \alpha_2 \\ o_0 &= \nu_3 - \alpha_3 \\ &\;\;\vdots \\ o_0 &= \nu_n - \alpha_n. \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Wegen der Fehler der Neigungen ν und der Beobachtungen α werden die aus den Gleichungen (108) ermittelten Werthe für o_0 nicht genau übereinstimmen, und wird daher das arithmetische Mittel

$$o_0 = \frac{\nu_1 - \alpha_1 + \nu_2 - \alpha_2 + \ldots + \nu_n - \alpha_n}{n} \tag{109}$$

in die Gleichung (107) zur Berechnung der Neigung φ_4 eingeführt.

Addirt man zum Orientirungswinkel o_0 analog (107) der Reihe nach auch die beobachteten Richtungen α_1, α_2, α_3, α_5 . . ., (d. i. die auf P nach den **gegebenen** Punkten beobachteten Richtungen), so werden dadurch die Beobachtungen α nach den gegebenen Neigungen ν orientirt, man erhält die **orientirten** Richtungen φ_1, φ_2, φ_3 φ_5 . . ., welche indessen wegen der Fehler der Beobachtungen α etwas von den correspondierenden **gegebenen** Neigungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_5 . . . abweichen werden. Bildet man die Differenzen $v_1 = \nu_1 - \varphi_1$, $v_2 = \nu_2 - \varphi_2$ etc., so gewinnt man ein Urtheil über die Genauigkeit der Beobachtungen α. Man erkennt leicht, dass die Summe der Fehler v, — analog (63) —, $= 0$ werden muss, bis auf kleine in der Abrundung begründete Differenzen. Hierin ist eine Probe für die richtige Berechnung des Orientirungswinkels etc. gegeben.

Ein Beispiel für diese Rechnungen giebt die nachstehende Tabelle — trigon. Formul. 5 der preussischen Verm.-Anw., — in welcher ⸹ 4 und ⸹ 10 **neu** zu bestimmende Punkte sind. Die Neigungen der Linien zwischen dem gegebenen Beobachtungspunkte ⸹ 6 einerseits und den weiteren **gegebenen** Punkten 1, 5, 8, 9 andererseits werden in Spalte 2 des Formulars eingetragen. Nach diesen werden die Beobachtungen α nach Anleitung der obigen Formeln*) orientirt und die orientirten Richtungen in Spalte 5 eingetragen, aus welcher sie zu den späteren Rechnungen entnommen werden.

Sobald man durch die nunmehr vorzunehmenden trigonometrischen Rechnungen, welche in den folgenden Paragraphen behandelt werden, die Coordinaten für die neu zu bestimmenden Punkte ermittelt hat, wird man auch die e n d g ü l t i g e n Neigungen ν der diese Punkte mit dem Beobachtungspunkte ⸹ 6 verbindenden Linien nach den Formeln (105) und (106) berechnen können, welche von den aus Spalte 5 entnommenen und zur Berechnung benutzten Neigungen φ, wegen der Verbesserungen, welche die letzteren Neigungen durch die Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kl. Quadrate erhalten, etwas abweichen werden.

*) Vergl. den Vordruck im Kopfe des Formulars.

Trigonometr. Formular 5.

Ziel-Punkte	Neigungen ν °	′	″	Beobachtete Richtungen α °	′	″	Unterschiede $\nu - \alpha$ Orientirungswinkel $0_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n}$ °	′	″	Orientirte Richtungen $\varphi = \alpha + 0_0$ °	′	″	Verbesserungen $v = \nu - \varphi$ +	−	Bemerkungen
1	2			3			4			5			6		7
				Standpunkt △6.											Probe
△1	147	42	37	0	00	00	147	42	37	147	42	50		13	$[\alpha] = 03' 42''$
⧖4				9	26	44				157	09	34			$n\, o_0 = 17' 00''$
△5	182	46	47	35	04	02	147	42	45	182	46	52		5	$[\varphi] = 20' 42''$
△8	198	46	21	51	03	14	147	43	07	198	46	04	17		
⧖10				100	10	35				247	53	25			
△9	273	01	57	125	19	07	147	42	50	273	01	57	0		
					03	42		171	19		20	42	17	18	
				$o_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n} =$			147	42	50						

Diese endgültigen Neigungen wird man dann ebenfalls in Spalte 2 eintragen — (an den bisher leer gebliebenen Stellen bei ⧖4 und ⧖10) — wird die Differenzen v gegen die in Spalte 5 eingetragenen Neigungen, (orientirten Richtungen φ), bilden und so ein Urtheil über die Genauigkeit der aus den Beobachtungen α hervorgegangenen, zur Berechnung der Coordinaten benutzten Neigungen φ gewinnen. Nach der pr. Verm.-Anw. darf die Differenz $v = \nu - \varphi$ für Punkte IV. Ordnung nicht den Betrag 25″, für Beipunkte nicht den Betrag 35″ überschreiten.

Wie hier die auf △6 beobachteten Richtungen, sind natürlich, ehe die weiteren trigonometrischen Rechnungen vorgenommen werden können, die auf **sämmtlichen** gegebenen Punkten beobachteten Richtungen zu orientiren. Sobald dann ein neu bestimmter Punkt berechnet ist, kann derselbe für die Bestimmung weiterer Punkte als **gegebener** Punkt benutzt werden und sind zu dem Ende die auf demselben ausgeführten Beobachtungen sofort in gleicher Weise zu orientiren.

§ 21.

Vorwärtseinschneiden.

Nachdem alle Richtungen, welche auf gegebenen Punkten nach einem neu zu bestimmenden Punkte hin beobachtet sind, in der im vor. § angegebenen Weise orientirt worden, nachdem also sämmtliche von gegebenen Punkten aus nach dem zu bestimmenden Punkte hin ausgehenden Strahlen bezüglich ihrer Neigungen φ gegen die Abscissenaxe bekannt sind, kann zur Coordinatenberechnung geschritten werden. Gemäss § 9, 2) erfolgt zunächst die

Berechnung der genäherten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$.*)

Man wählt zu dem Ende unter den vorhandenen Beobachtungen zwei von den gegebenen Punkten P_a und P_b, Fig. 39, nach dem gesuchten Punkte P ausgehende Strahlen aus, welche sich in P möglichst annähernd rechtwinklig schneiden**),

*) In Abthl. I des trigon. Formulars 10 der pr. Verm.-Anw.

**) Wegen § 12.

und entnimmt deren Neigungen φ_a und φ_b aus Spalte 5 des im vor. § dargestellten Formulars. Die Winkel δ_a, δ_b und δ des Dreiecks $P_a\,P_b\,P$ ergeben sich aus den bekannten Neigungen, wie die Figur ergiebt:

$$\delta_a = \varphi_a - \nu_a^b, \quad \delta_b = \varphi_a - \varphi_b \pm 180^0, \quad \delta = \varphi_b - \varphi_a. \tag{110}$$

Es ist nun, wenn man die Coordinaten der gegebenen Punkte P_a und P_b mit y_a, x_a, y_b, x_b bezeichnet, im übrigen aber die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$a = s\,\frac{\sin\delta_a}{\sin\delta} = \frac{y_b - y_a}{\sin\nu_a^b}\cdot\frac{\sin\delta_a}{\sin\delta}$$

$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta\,\sin\nu_a^b}$$

und analog auch

$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{x_b - x_a}{\sin\delta\,\cos\nu_a^b}.$$

Setzt man
$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{b}{\sin\delta_b} = m \tag{111}$$

so ist
$$m = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta\,\sin\nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\sin\delta\,\cos\nu_a^b}. \tag{111a}$$

Ferner ist

$$\triangle y_a = a\sin\varphi_a \qquad \triangle x_a = a\cos\varphi_a$$
$$\triangle y_a = b\sin\varphi_b \qquad \triangle x_b = b\cos\varphi_b$$

also nach (111)

$$\left.\begin{aligned} \triangle y_a &= m\sin\delta_a\sin\varphi_a \qquad & \triangle x_a &= m\sin\delta_a\cos\varphi_a \\ \triangle y_a &= m\sin\delta_b\sin\varphi_b \qquad & \triangle x_a &= m\sin\delta_b\cos\varphi_b \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{y} &= y_a + \triangle y_a \qquad & \mathfrak{x} &= x_a + \triangle x_a \\ &= y_b + \triangle y_b & &= x_b + \triangle x_b \end{aligned} \tag{113}$$

Aufstellung der Fehlergleichungen: Wir haben nun weiter mit Hülfe der genäherten Werthe $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die genäherten Neigungen n abzuleiten, — vergl. § 9, 2) — und mit den beobachteten Neigungen φ zu vergleichen, und benutzen dazu die Formel (105)

$$\operatorname{tang} n = \frac{\triangle\mathfrak{y}}{\triangle\mathfrak{x}} \tag{114}$$

worin $\triangle\mathfrak{y} = y - \mathfrak{y}$, $\triangle x = x - \mathfrak{x}$. Diese Formel liefert uns die Neigungen $n_P^{P_1}$, $n_P^{P_2}$ etc., welche, um mit den Neigungen $\varphi_{P_1}^P$, $\varphi_{P_2}^P$ etc. verglichen werden zu können, um 180° zu ändern sind. Wir erhalten somit, — vergl. (75) — :

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= n_1 - (\varphi_1 \pm \pi) \\ f_2 &= n_2 - (\varphi_2 \pm \pi) \end{aligned}\right\} \tag{115}$$
$$\text{etc.}$$

Es kommt nun weiter darauf an, den Punkt P durch Aenderung seiner Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ so zu verschieben, dass, wenn wir die Werthe, welche die Neigungen n durch diese Verbesserung gemäss (114) erhalten, mit ν bezeichnen, und

$$\nu_1 - (\varphi_1 \pm \pi) = v_1$$
$$\nu_2 - (\varphi_2 \pm \pi) = v_2$$
$$\text{etc.}$$

setzen, die Summe der Quadrate der einzelnen v zum Minimum wird. Bezeichnen wir die uns noch unbekannten Coordinatenverbesserungen, durch welche dieser Bedingung genügt wird, mit $\delta\,\mathfrak{y}$ und $\delta\,\mathfrak{x}$, die durch diese Verbesserungen in den einzelnen Neigungen n hervorgebrachten Aenderungen mit δ n, so ist gemäss (76)

$$\left.\begin{array}{l} \delta\,n_1 = a_1\,\delta\,\mathfrak{x} + b_1\,\delta\,\mathfrak{y} \\ \delta\,n_2 = a_2\,\delta\,\mathfrak{x} + b_2\,\delta\,\mathfrak{y} \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\} \tag{116}$$

worin a und b die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\operatorname{tang} n = \frac{\triangle\,\mathfrak{y}}{\triangle\,\mathfrak{x}}$ nach $\triangle\,\mathfrak{y}$ und $\triangle\,\mathfrak{x}$ bezeichnen. Indem wir diese Differentiation (nach (24) und (25)) ausführen und die partiellen Differentiale nach (29) addiren, erhalten wir:

$$d \operatorname{tang} n = -\frac{\triangle\,\mathfrak{y}}{\triangle\,\mathfrak{x}^2}\, d\,(\triangle\,x) + \frac{d\,(\triangle\,\mathfrak{y})}{\triangle\,\mathfrak{x}}$$

da $\triangle\,\mathfrak{y} = y - \mathfrak{y}$, $\triangle\,x = x - \mathfrak{x}$, worin y und x, also die Coordinaten der gegebenen Punkte, Constante, und nur $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ veränderlich sind, so ist $d\,(\triangle\,\mathfrak{y}) = -\,\delta\,\mathfrak{y}$, $d\,(\triangle\,\mathfrak{x}) = -\,\delta\,\mathfrak{x}$, und wir erhalten somit nach (41):

$$\frac{\delta\,n}{\cos^2 n} = \frac{\triangle\,\mathfrak{y}}{\triangle\,\mathfrak{x}^2}\,.\,\delta\,\mathfrak{x} - \frac{1}{\triangle\,\mathfrak{x}}\,.\,\delta\,\mathfrak{y}$$

$$\delta\,n = \frac{\triangle\,\mathfrak{y}\,\cos^2 n\,\delta\,\mathfrak{x}}{\triangle\,\mathfrak{x}^2} - \frac{\cos^2 n}{\triangle\,\mathfrak{x}}\,\delta\,\mathfrak{y}.$$

Bezeichnen nun s_1, s_2 . . . die Entfernungen des Punktes P von den gegebenen Punkten P_1, P_2 . . ., so ist: $\cos n = \frac{\triangle\,\mathfrak{x}}{s}$, also $\frac{\cos n}{\triangle\,\mathfrak{x}} = \frac{1}{s}$, und ferner $\frac{\triangle\,\mathfrak{y}}{\triangle\,\mathfrak{x}} = \operatorname{tang} n = \frac{\sin n}{\cos n}$, also

$$\delta\,n = \frac{1}{s}\sin n\,\delta\,\mathfrak{x} - \frac{1}{s}\cos n\,\delta\,\mathfrak{y}$$

wodurch wir δ n in analytischem Winkelmasse erhalten. In Sekunden ausgedrückt ist also:

$$\delta\,n = \varrho''\,\frac{\sin n}{s}\,\delta\,\mathfrak{x} - \varrho''\,\frac{\cos n}{s}\,\delta\,\mathfrak{y}.$$

Demnach ist in (116)

$$a = \varrho''\,\frac{\sin n}{s}, \quad b = -\,\varrho''\,\frac{\cos n}{s}\ ^{*)} \tag{117}$$

---

*) Ein anderer Ausdruck für a und b ergiebt sich wie folgt: Da $a\,\delta\,x$ die in Sekunden ausgedrückte Aenderung der Neigung n vorstellt, welche durch Aenderung von $\triangle\,\mathfrak{x}$ um den Betrag $\delta\,x$ entsteht, so ist a nichts Anderes, als die Aenderung von n, welche einer Aenderung von $\triangle\,\mathfrak{x}$ um 1 (1 m) entspricht. Durch partielle Differentiation der Gleichung $\log \operatorname{tang} n = \log \triangle\,\mathfrak{y} - \log \triangle\,\mathfrak{x}$ nach $\triangle\,\mathfrak{x}$ erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen unbeachtet lassen, $d \log \operatorname{tang} n = d \log \triangle\,\mathfrak{x}$. Ist nun die Aenderung von $\triangle\,\mathfrak{x} = 1$, so kann die zugehörige Aenderung von $\log \triangle\,\mathfrak{x}$, (also $d \log \triangle\,\mathfrak{x}$) durch Bildung der Tafeldifferenz erhalten werden. Sie sei $= D_x$. Bezeichnet ferner $D_{\operatorname{tang} n}$ die Tafeldifferenz des $\log \operatorname{tang} n$ für 1″, so ist die Aenderung des $\log \operatorname{tang} n$ für $a'' = a\,D_{\operatorname{tang} n}$, und es ist nach Obigen: $a\,D_{\operatorname{tang} n} = D_x$, also $a = \frac{D_x}{D_{\operatorname{tang} n}}$. Analog findet man $b = \frac{D_y}{D_{\operatorname{tang} n}}$. Es erhält nun, wie aus (117) erhellen wird, a das Vorzeichen von $\triangle\,\mathfrak{y}$, b das umgekehrte Vorzeichen von $\triangle\,\mathfrak{x}$.

Graphisch kann man a und b wie folgt finden: Man trägt die Punkte P und P_1 mittelst ihrer Coordinaten $\mathfrak{y}$ und y_1, $\mathfrak{x}$ und x_1 auf, ermittelt nach der Zeichnung die Länge s, ändert nun die Abscisse $\mathfrak{x}$ um 1, fällt von dem so erhaltenen Punkte ein Loth $= h_x$ auf den Strahl s, so ist $\frac{h_x}{s}\,\varrho'' = a$. Entsprechend

Die geänderten Neigungen $\nu = \mathrm{n} + \delta\,\mathrm{n}$ sind nun nach (116)

$$\nu = \mathrm{n} + \mathrm{a}\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}\,\delta\,\mathfrak{y}. \tag{118}$$

Vergleichen wir diese endgültigen Neigungen nach Anleitung des § 9 mit den beobachteten Neigungen φ, so kommen die Verbesserungen v zum Vorschein. Wir erhalten die Fehlergleichungen (77):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= \mathrm{a}_1\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}_1\,\delta\,\mathfrak{y} + \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{v}_2 &= \mathrm{a}_2\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}_2\,\delta\,\mathfrak{y} + \mathrm{f}_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

durch welche wir durch die Minimumsbedingung $[\mathrm{v\,v}] = \text{minim.}$ zu den Normalgleichungen (79) gelangen, aus denen sich $\delta\,\mathrm{y}$ und $\delta\,\mathrm{x}$ nach § 9, 3) ergeben.

Neben den aus Gl. (82) und (83) sich ergebenden Rechenproben verschaffen wir uns eine weitere, die gesammten Ausgleichungsrechnungen controllirende Probe, indem wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\mathfrak{y} + \delta\,\mathfrak{y}$, $\mathrm{x} + \delta\,\mathfrak{x}$ die Neigungen ν ableiten und die Verbesserungen $\mathrm{v} = \nu - (\varphi \pm \pi)$ bilden, welche mit den aus (119) berechneten Werthen v übereinstimmen müssen.*)

Der mittlere Fehler der Beobachtungen ist nach (87)

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{[\mathrm{v\,v}]}{\mathrm{n}-2}}.$$

§ 22.

Rückwärtseinschneiden.**)

Sind zur Beobachtung eines Punktes nur Beobachtungen auf diesem Punkte selbst ausgeführt, so erfolgt die Berechnung der genäherten Coordinaten nach folgenden Formeln:

Gegeben seien die Punkte $\mathrm{P_a}$, $\mathrm{P_m}$, $\mathrm{P_b}$, Fig. 40, gesucht der Punkt P, auf welchem die Richtungen nach den gegebenen Punkten, also die Winkel α und β gemessen sind. Wir finden zunächst die Neigungen $\nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}$ und $\nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}$ auf bekannte Weise nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_a}}{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_a}} \\ \operatorname{tang} \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_b}}{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_b}} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

sowie die Längen a und b nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_a}}{\sin \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_a}}{\cos \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}} \\ \mathrm{b} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_b}}{\sin \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_b}}{\cos \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}}. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

---

erhält man durch Aenderung der Ordinate $\mathfrak{y}$ um 1, und durch Fällen des Lothes $\mathrm{h_y}$: $\frac{\mathrm{h_y}}{\mathrm{s}}\,\varrho'' = \mathrm{b}$. Die Aenderungen der Coordinaten y und $\mathfrak{x}$ um 1 m müssen in grossem, das Abgreifen von Centimetern gestattenden Massstab ausgeführt werden. Sind $\mathrm{h_x}$ und $\mathrm{h_y}$ in cm, s in Metern ausgedrückt, und setzt man $\frac{\varrho''}{100} = \mathrm{k}$, so ist $\mathrm{a} = \mathrm{h_x}\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$, $\mathrm{b} = \mathrm{h_y}\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$, worin $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

*) Nach der pr. Verm.-Anw. erhalten die aus (119) gebildeten Werthe die Bezeichnung u. Die Probe lautet dann: u soll = v sein.

**) Trigon. Formul. 11 der preussischen Verm.-Anw.

Ferner kennen wir:

$$\gamma + \delta = r_a^m = r_b^m. \tag{122}$$

Setzen wir $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\,\sigma$, so ist:

$$\varphi + \psi = \pi - \sigma \tag{123}$$

und es kommt uns nun zunächst darauf an, $\varphi - \psi$ zu berechnen, um mit Hülfe von (123) zu den einzelnen Winkeln φ und ψ zu gelangen. — Nach dem Sinussatze ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{s_m \sin\alpha}{a} \\ \sin\psi &= \frac{s_m \sin\beta}{b} \end{aligned}\right\} \tag{123a}$$

folglich

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\dfrac{s_m \sin\alpha}{a} + \dfrac{s_m \sin\beta}{b}}{\dfrac{s_m \sin\alpha}{a} - \dfrac{s_m \sin\beta}{b}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{a} + \dfrac{\sin\beta}{b}}{\dfrac{\sin\alpha}{a} - \dfrac{\sin\beta}{b}}$$

$$= \frac{b\sin\alpha + a\sin\beta}{b\sin\alpha - a\sin\beta}.$$

Hieraus erhalten wir nach einer bekannten goniometrischen Formel, wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch b $\sin\alpha$ dividiren:

$$\frac{2\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2}\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\dfrac{\varphi+\psi}{2}\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{1 + \dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1 - \dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}$$

oder wenn wir

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} = \operatorname{tang}\mu \tag{124}$$

setzen:

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{1+\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}\mu}$$

$$\cot\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu\right)}{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi+\psi}{2}}$$

oder auch

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu\right)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\,\cot\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right). \tag{125}$$

Als Rechenprobe ergiebt sich aus (123a)

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}. \tag{126}$$

Endlich ist nun:

$$\triangle y_a = s_a \sin r_a$$

oder wenn wir s_a durch den Sinussatz ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
\triangle y_a &= \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \sin \nu_a \\
\text{und analog} \quad & \\
\triangle x_a &= \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \cos \nu_a \\
\triangle y_b &= \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta} \sin \nu_b \\
\triangle x_b &= \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta} \cos \nu_b
\end{aligned}\right\} \quad (126a)$$

Die Lage des Punktes P bleibt unbestimmt, wenn derselbe in der Peripherie des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises liegt, in welchem Falle α und β Peripheriewinkel dieses Kreises werden, daher für jeden beliebigen Punkt in der Peripherie gleich bleiben. Hierauf hat man bei der Auswahl der drei zur Berechnung der genäherten Coordinaten zu benutzenden gegebenen Punkte zu achten.

Aufstellung der Fehlergleichungen: Wir berechnen zunächst mit Hülfe der genäherten Coordinaten, welche sich analog (113) aus den Formeln (126) ergeben, die genäherten Neigungen $n_1, n_2 \ldots$ nach (114). Ziehen wir von jeder einzelnen der Neigungen $n_1, n_2 \ldots$ den Winkel $o_0 = n_1 - \alpha_1$*) ab, so erhalten wir die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
w_1 &= n_1 - (n_1 - \alpha_1) = n_1 - o_0 = \alpha_1 \\
w_2 &= n_2 - (n_1 - \alpha_1) = n_2 - o_0 \\
&\;\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
w_n &= n_n - (n_1 - \alpha_1) = n_n - o_0
\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

Die Werthe w müssten nun, wenn sowohl die genäherten Neigungen n als die Beobachtungen α fehlerlos wären, mit den Beobachtungen α übereinstimmen, wie sofort aus Fig. 38 klar wird, wenn man sich in dieser die Bezeichnungen n_1, $n_2 \ldots$ statt $\nu_1\ \nu_2 \ldots$ geschrieben denkt. In Wahrheit ergeben sich aber die Widersprüche:

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= w_1 - \alpha_1 \\
f_2 &= w_2 - \alpha_2 \\
&\;\vdots \qquad \vdots \\
f_n &= w_n - \alpha_n
\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

und es kommt nun darauf an, die genäherten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ um die kleinen Beträge d y und d x so zu verbessern, dass die Summe der Quadrate der dann noch übrig bleibenden Widersprüche, welche wir jetzt mit v bezeichnen, ein Minimum werde.

Durch die Aenderungen der Coordinaten um d y und d x werden sich die Neigungen n um d n ändern, und es ist

$$d\,n = a\,d\,x + b\,d\,y$$

worin a und b nach Formel (117) zu berechnen sind. Die endgültigen Neigungen ν ergeben sich somit:

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1 &= n_1 + a_1\,d\,x + b_1\,d\,y \\
\nu_2 &= n_2 + a_2\,d\,x + b_2\,d\,y
\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

etc.

*) Sind die Beobachtungen α auf die Anfangsrichtung reducirt, ist also $\alpha_1 = 0$, so ist $o_0 = n_1$.

Hieraus erhalten wir, indem wir wieder von den Neigungen ν den Winkel $0'_0 = \nu_1 - \alpha_1$ abziehen, die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{n}_1 + a_1\,d\,x + b_1\,d\,y - o'_0 = w'_1 \\ \mathfrak{n}_2 - a_2\,d\,x + b_2\,d\,y - o'_0 = w'_2 \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (130)$$

die nun noch übrig bleibenden Fehler sind analog (128)

$$\begin{array}{l} v_1 = w'_1 - \alpha_1 \\ v_2 = w'_2 - \alpha_2 \\ \quad\text{etc.} \end{array}$$

oder nach (130), wenn wir das uns noch unbekannte $o'_0 = o_0 - z$*) setzen:

$$\begin{array}{l} v_1 = \mathfrak{n}_1 + a_1\,d\,x + b_1\,d\,y - o_0 + z - \alpha_1 \\ v_2 = \mathfrak{n}_2 + a_2\,d\,x + b_2\,d\,y - o_0 + z - \alpha_2 \\ \quad\text{etc.} \end{array}$$

oder da nach (127) $\mathfrak{n}_1 - o_0 = w_1$ und nach (128) $w_1 - \alpha_1 = f_1$, also $\mathfrak{n}_1 - o_0 - \alpha_1 = f_1$ und analog $\mathfrak{n}_2 - O_0 - \alpha_2 = f_2$ etc.:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = f_1 + z + a_1\,d\,x + b_1\,d\,y \\ v_2 = f_2 + z + a_2\,d\,x + b_2\,d\,y \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (131)$$

Um z zu eliminiren, bilden wir aus diesen Gleichungen das arithmetische Mittel:

$$\frac{[v]}{n} = \frac{[f]}{n} + z + \frac{[a]}{n}\,d\,x + \frac{[b]}{n}\,d\,y$$

welches wir mit einfacheren Zeichen schreiben wollen:

$$v_m = f_m + z + a_m\,d\,x + b_m\,d\,y.$$

Ziehen wir diese Gleichung von den einzelnen Fehlergleichungen (131) ab, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} v_1 - v_m = f_1 - f_m + (a_1 - a_m)\,d\,x + (b_1 - b_m)\,d\,y \\ v_2 - v_m = f_2 - f_m + (a_2 - a_m)\,d\,x + (b_2 - b_m)\,d\,y \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\}^{**)} \qquad (131a)$$

welche Gleichungen wir, um wieder auf die Form der Gleichungen (77) zu gelangen, unter Einführung einfacherer Zeichen schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{a}_1\,d\,x + \mathfrak{b}_1\,d\,y \\ \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{a}_2\,d\,x + \mathfrak{b}_2\,d\,y \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (132)$$

Die Bedingung $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = \text{minim.}$ führt uns dann wieder zu den Normalgleichungen (79), deren Auflösung nach § 9, 3) erfolgt.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen ergiebt sich nach (87), da **drei** Beobachtungen zu einer einmaligen Bestimmung des Punktes P gehören:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n - 3}}.$$

---

*) Statt $o'_0 = \nu_1 - \alpha_1$ zu bilden, könnte man auch $o'_0 = \nu_2 - \alpha_2$, oder $o'_0 = \nu_3 - \alpha_3$ etc. bilden. Alle diese Werthe für den Orientirungswinkel o_0 werden etwas differiren und wir müssten eigentlich das arithmetische Mittel o_m statt o'_0 einsetzen. Indem wir $o'_0 = o_0 - z$ statt $o_m = o_0 - z$ setzen, stellen wir in z zugleich den Fehler des Orientirungswinkels o'_0 dar. Die uns noch Unbekannte z ist nun zu eliminiren, wie dies in Folgendem geschieht.

**) Die Bildung der Mittel a_m, b_m, f_m und der Werthe $a - a_m$, $b - b_m$, $f - f_m$ erfolgt in Abth. 3 des trigon. Formul. 11 der pr. Verm.-Anw. Als Rechenprobe hat man gemäss (63) $[a - a_m] = 0$, $[b - b_m] = 0$, $[f - f_m] = 0$.

Als **Rechenprobe** leiten wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\mathfrak{y} + d\,y$, $\mathfrak{x} + d\,x$ die endgültigen Neigungen ν ab, bilden die Grössen $v_1 = (\nu_1 - o_0) - \alpha_1$, $v_2 = (\nu_2 - o_0) - \alpha_2$ etc., ziehen das Mittel $\frac{[v]}{n} = v_m$ von den einzelnen Grössen v ab*), so müssen die so erhaltenen Werthe mit den aus (132) sich ergebenden Werthen v übereinstimmen.

§ 23.

Das combinirte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21, die der genäherten Neigungen n und der Werthe a und b nach (114) bis (117). Die Fehlergleichungen für die Vorwärtsbeobachtungen werden nach § 21, für die Rückwärtsbeobachtungen nach § 22 angesetzt, d. h. es werden für die Rückwärtsbeobachtungen die Grössen a, b und f um ihre arithmetischen Mittel a_m, b_m, f_m gekürzt, dann aber die Quadrate $a_1 a_1, a_2 a_2 \ldots$, $b_1 b_1, b_2 b_2 \ldots$, und die Produkte $a_1 b_1, a_2 b_2 \ldots$, $a_1 f_1, a_2 f_2 \ldots$, $b_1 f_1, b_2 f_2 \ldots$ für die Rückwärts- und Vorwärtsrichtungen je in **einer** Summe vereinigt, um die Coefficienten der Normalgleichungen [a a], [b b] etc. zu erhalten.

§ 24.

Einschneiden mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.**)

1) Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21. Sind Rückwärtsrichtungen vorhanden, so werden diese nach den Vorwärtsrichtungen orientirt, welche Rechnungsoperation ganz nach dem Beispiel des § 20 erfolgt. Es werden nämlich die aus dem trigon. Formular 5 des § 20 entnommenen orientirten Vorwärtsrichtungen φ in ein ähnliches Formular eingetragen, diesen die entsprechenden Rückwärtsrichtungen α gegenübergestellt, der Orientirungswinkel $o_0 = \frac{[n - \alpha]}{n}$ gebildet und hierzu die Beobachtungen α der Reihe nach addirt. Die so erhaltenen Neigungen ψ werden gegen die durch die Vorwärtsbeobachtungen erhaltenen Neigungen φ etwas differiren, und wird daher das arithmetische Mittel $\mu = \frac{\varphi + \psi}{2}$ in die folgenden Rechnungen eingeführt.

Je weniger Vorwärtsrichtungen vorliegen, um so unsicherer wird die Orientirung der Rückwärtsrichtungen, mit um so grösserer Vorsicht muss das im Folgenden beschriebene, sonst aber sehr gute Resultate liefernde Verfahren angewendet werden.

Seien nun die genäherten Coordinaten des gesuchten Punktes $P_1 = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus irgend zwei beobachteten Richtungen berechnet worden, und denken wir uns zur Abscissenaxe in der Entfernung $\mathfrak{y}$ eine Parallele gezogen, Fig. 41, so können wir den Punkt p, in welchem diese Parallele von der auf dem Punkte P_1 beobachteten Neigung μ_1 geschnitten wird, berechnen. Bezeichnen $x_1\, y_1$ die Coordinaten des gegebenen Punktes P_1, $\mathfrak{x}_1$ die gesuchte Abscisse des Punktes p, so ergiebt sich aus der Figur ohne Weiteres:

*) Behufs Elimination des in der Anmerkung auf Seite 74 gedachten Orientirungsfehlers.

**) Trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x}_1 = x_1 + (\mathfrak{x}_1 - x_1) \\ \text{Hierin ist der Klammerausdruck:} \\ \qquad (\mathfrak{x}_1 - x_1) = (\mathfrak{y} - y_1) \cot \mu_1 \end{array}\right\} \quad (133)$$

aus welchen beiden Gleichungen sich $\mathfrak{x}_1$ ergiebt.

Wären die genäherten Coordinaten und sämmtliche Neigungen μ fehlerfrei, so würden die auf sämmtlichen gegebenen Punkten nach P beobachteten Richtungen μ die Parallele in einem und demselben Punkte, und zwar in P, treffen. Da diese Voraussetzung in Wahrheit nicht zutrifft, so werden die berechneten Axenabstände $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ . . . kleine Differenzen zeigen. Trägt man dieselben in grossem Massstabe, (1 : 10), auf einer graden Linie, — indem man sie bis auf die Einerstellen und die folgenden Decimalen kürzt, — von irgend einem Punkte aus ab, und trägt in den so gewonnenen Punkten 1, 2, 3, 4, Fig. 42, bezüglich die um 180° geänderten Neigungen $\mu_1 \mu_2$, μ_3 . . . an, so gewinnt man ein übersichtliches Bild der Strahlenschnitte, und es kommt nun darauf an, in dieser Schnittfigur die wahrscheinlichste Lage des Punktes P so zu ermitteln, dass, wenn man die Neigungen μ in der Weise ändert, dass sie sämmtlich den zu ermittelnden wahrscheinlichsten Punkt P treffen, die Summe der Quadrate dieser Aenderungen ein Minimum werde.

Da die Aenderungen d μ sehr kleine Winkel sind, so kann man die Bögen d μ gleich den von P auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothen setzen, welche wir mit h bezeichnen. Die Winkel d μ sind also, in analytischem Masse ausgedrückt, $= \frac{h}{s}$, wenn s die Länge der einzelnen Strahlen, also s_1 die Länge $P P_1$, s_2 die Länge $P P_2$ etc.*) bezeichnet. Die Aufgabe lautet also, es soll $\left[\frac{h^2}{s^2}\right]$ zum Minimum werden. Sind die Strahlen zum Theil einseitig, zum Theil zweiseitig beobachtet, so sind ihnen die Gewichte 1, bezw. 2 beizulegen. Setzt man die Strahlengewichte $= t$, wo also die einzelnen t entweder $= 1$ oder $= 2$ sein müssen, je nachdem die Beobachtungen ein- oder zweiseitig ausgeführt sind, und setzt man $\frac{t}{s^2} = p$, so lautet nun die Forderung

$$[p\, h^2] = \text{minim.}$$

Nach dem Bertot'schen Verfahren findet man die wahrscheinlichste Lage des Punktes P in der Schnittfigur wie folgt: Man schlage um einen durch Schätzung bestimmten, also angenäherten Punkt P einen Kreis, nehme in der Peripherie desselben einen beliebigen Punkt Q an, fälle von Q auf sämmtliche Strahlen Lothe, und verlängere dieselben bis zum Durchschnitt mit der Kreisperipherie. Bezeichnen wir diese Durchschnittspunkte mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ etc., die Fusspunkte der Lothe mit F_1, F_2 etc. und ermitteln wir die Coordinaten sämmtlicher $\mathfrak{K}$ und F, tragen mit den arithmetischen Mitteln derselben als Coordinaten die Punkte K und F ein, ziehen nach einander die Linien Q F T_1, Fig. 43, T_1 K T_2, T_2 M T_3, T_3 Q, so liegt der zu bestimmende Punkt P auf der Linie Q T_3, und zwar ist $Q P = \frac{T_2 T_3 Q F}{T_2 K}$, wonach P gefunden werden kann.**)

---

*) Die Längen s kann man nach der trigonometrischen Netzkarte ermitteln, nachdem man in dieselbe den Punkt P mittelst seiner genäherten Coordinaten eingetragen. Die Grössen $\frac{1}{s^2}$ liefert sodann Tafel III Anhang.

**) Die bezüglichen Rechnungen werden in Abth. IV des trigon. Formul. 12 ausgeführt.

Den Beweis dieses Satzes werden wir, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, am Schlusse dieses Paragraphen bringen.

Die Bildung des Mittels der Coordinaten der Punkte $\mathfrak{K}$ und F erfolgt wegen der verschiedenen Strahlengewichte p nach (73).

Zur Probe für die Richtigkeit der Construktion werden von dem gefundenen Punkte P auf die einzelnen Strahlen Lothe gefällt, die Coordinaten der Fusspunkte derselben ermittelt, deren (nach (73) zu bildendes) Mittel die Coordinaten des Punktes P geben muss, wenn die Minimumsbedingung erfüllt sein soll. (Vergl. Thl. I § 37, Beispiel 2)).

Nachdem man die Längen der Lothe h ermittelt, findet man den mittleren Fehler

$$m = \sqrt{\frac{[p\,h\,h]}{n-2}}.$$

Um die Verbesserungen $d\mu$ in Sekunden auszudrücken, haben wir, wenn h in Centimetern, s in Metern ausgedrückt ist

$$d\mu'' = \frac{\varrho''\,h}{100\,.\,s}$$

oder für $\frac{\varrho''}{100} = k$, und für $d\mu'' = v$:

$$v = \frac{k}{s}\,h\,.$$

wo die Grössen $\frac{k}{s}$ aus Tafel III Anhang zu entnehmen sind.

Leiten wir aus den endgültigen Coordinaten die endgültigen Neigungen ν ab*), so werden dieselben gegen die Neigungen $\mu \pm \pi$ um die Grössen v differiren, worin eine Probe für die Rechnungen gegeben ist.

Wir müssen noch eines bisweilen vorkommenden Falles Erwähnung thun, dass nämlich irgend einer der Strahlen annähernd der Abscissenaxe parallel, μ also nahe $= 0^0$ oder 180^0 ist, wie in Fig. 42 der Strahl a b. Hier würde der Axenabstand $\mathfrak{x}_s$ sich so gross ergeben, dass er auf dem Papierbogen, den man zur Auftragung der Schnittfigur benutzt, nicht Platz findet. In diesem Falle denkt man sich durch den durch die genäherten Coordinaten bestimmten Punkt P eine Parallele zur **Ordinatenaxe** und berechnet den Schnittpunkt des Strahls mit **dieser** Parallelen, d. h. man bedient sich statt der Formeln (133) der analogen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y}_5 &= y_5 + (\mathfrak{y}_5 - y_5) \\ \mathfrak{y}_5 - y_5 &= (\mathfrak{x} - x_5)\,\mathrm{tang}\,\mu_5 \end{aligned}\right\} \qquad (133a)$$

woraus der Axenabstand $\mathfrak{y}_5$ zu berechnen ist. Da in Fig. 42 die Linie X X die im Abstand der genäherten Ordinate zur Abscissenaxe gedachte Parallele darstellt, ihre Entfernung von der Abscissenaxe also $= \mathfrak{y}$ ist, so ist der Abstand des Schnittpunktes 5 von dieser Linie $= \mathfrak{y}_5 - \mathfrak{y}$. Diese Grösse ist auf der Parallelen zur **Ordinatenaxe**, Y Y, von der Linie X X aus nach rechts oder links abzutragen, je nachdem sie positiv oder, wie in der Figur, negativ sich ergiebt.

2) **Bertot'sches Problem.**)** In einer Strahlenschnittfigur, Fig. 44, soll ein Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der von demselben auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothe ein Minimum wird.

---

*) Abthl. 6 des trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

**) Nach einem Vortrag von Steuerrath Scherer. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band XIII.

Es seien: 1) P der gesuchte Punkt,

2) Q ein beliebiger Punkt innerhalb der Schnittfigur. Von Q werden Lothe auf die einzelnen Strahlen gefällt und deren Fusspunkte mit F_1, F_2 etc. bezeichnet. F sei der Schwerpunkt der Fusspunkte, so dass, wenn $d\,y_F$, $d\,x_F$ die Coordinaten der einzelnen F bezeichnen:

$$\text{a)}\quad d\,y_F = \frac{d\,y_{F_1} + d\,y_{F_2} + \ldots}{n}$$

$$\text{b)}\quad d\,x_F = \frac{d\,x_{F_1} + d\,x_{F_2} + \ldots}{n}.$$

Ferner werde über QP ein Kreis geschlagen, die Durchschnitte der vorerwähnten Lothe mit demselben mit K_1, K_2 etc. bezeichnet. — Die Coordinaten des Schwerpunktes K der einzelnen Kreisdurchschnitte sind:

$$\text{c)}\quad d\,y_k = \frac{d\,y_{k_1} + d\,y_{k_2} + \ldots}{n}$$

$$\text{d)}\quad d\,x_k = \frac{d\,x_{k_1} + d\,x_{k_2} + \ldots}{n}.$$

I. Die Schwerpunkte K und F fallen zusammen.

Beweis:

Nach den Bezeichnungen der Fig. ist:

$$\text{1)}\quad d\,y_{F_3} - d\,y_{k_3} = F_3\,c\,.$$
$$d\,x_{F_3} - d\,x_{k_3} = K_3\,c.$$

Da $\angle\, P\,K_3\,Q = 90^0$, so folgt:

$$\triangle\, F_3\,K_3\,c \cong P_3\,P\,d, \text{ also}$$
$$F_3\,c = P_3\,d$$
$$= d\,y_{P_3} - d\,y_P = d\,y_{P_3} - \mathfrak{y}$$

wenn $\mathfrak{y}$ die Ordinate des Punktes P bezeichnet.

Analog erhält man:

$$K_3\,c = d\,x_{P_3} - \mathfrak{x}$$

also nach
$$\text{1)}\quad d\,y_{F_3} - d\,y_{k_3} = d\,y_{P_3} - \mathfrak{y}$$
$$d\,x_{F_3} - d\,x_{k_3} = d\,x_{P_3} - \mathfrak{x}$$

und analog:
$$\text{2)}\quad d\,y_{F_n} - d\,y_{k_n} = d\,y_{P_n} - \mathfrak{y}$$
$$d\,x_{F_n} - d\,x_{k_n} = d\,x_{P_n} - \mathfrak{x}.$$

Durch Subtraktion der Gleichung c) von a) ergiebt sich, wenn man für $d\,y_F - d\,y_k$ etc. die Werthe nach 2) einsetzt:

$$d\,y_F - d\,y_k = (d\,y_{P_1} - \mathfrak{y}) + (d\,y_{P_2} - \mathfrak{y}) + \ldots$$
$$= d\,y_{P_1} + d\,y_{P_2} + \ldots - n\,\mathfrak{y}.$$

Nach der Minimumsbedingung für P ist aber, (Thl. I, § 37, Beispiel 2)):

$$d\,y_{P_1} + d\,y_{P_2} + \ldots = n\,\mathfrak{y}$$

also $d\,y_F - d\,y_k = 0$, oder $d\,y_F = d\,y_k$, und analog $d\,x_F = d\,x_k$.

II. Wird um den beliebigen Punkt $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}\,Q$ ein Kreis geschlagen, die Perpendikel QF bis zum Durchschnitt mit dessen Peripherie in den Punkten $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ... verlängert, so liegen in diesem Kreise die Durchschnitte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ..., ihr

Schwerpunkt $\mathfrak{K}$ und der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ bezüglich **ähnlich** zu den dem Kreise über PQ angehörigen Punkten K_1, K_2 . . ., F und M.

Beweis:

Das Polygon $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n$ ist $\sim$ dem Polygon $K_1, K_2 \ldots K_n$, denn die Peripheriewinkel bei Q sind für beide Kreise gemein, mithin die zugehörigen Centriwinkel gleich. — Denkt man sich nun die beiden Kreise nach Anleitung der Fig. 45 mit ihren Mittelpunkten zusammengelegt, so ist nur noch zu zeigen, dass $\mathfrak{K}\,F\,\mathfrak{M}$ eine Gerade ist. Es ist aber, da nach I $d\,y_F = d\,y_k$

$$\alpha)\ n\,d\,y_F = d\,y_{k_1} + d\,y_{k_2} + \ldots$$

$$\beta)\ n\,d\,x_F = d\,x_{k_1} + d\,x_{k_2} + \ldots$$

und

$$\gamma)\ n\,d\,y_{\mathfrak{K}} = d\,y_{\mathfrak{K}_1} + d\,y_{\mathfrak{K}_2} + \ldots$$

$$\delta)\ n\,d\,x_{\mathfrak{K}} = d\,x_{\mathfrak{K}_1} + d\,x_{\mathfrak{K}_2} + \ldots$$

Bezeichnet man ferner die Neigungswinkel $HM\mathfrak{K}_1$, $HM\mathfrak{K}_2$ . . . mit α_1, α_2 . . ., so ist, wenn man die Radien der beiden Kreise $=$ r und R setzt:

$$d\,y_{k_1} = r \sin \alpha_1 \quad \text{und} \quad d\,x_{k_1} = r \cos \alpha_1$$

$$d\,y_{k_2} = r \sin \alpha_2 \qquad d\,x_{k_2} = r \cos \alpha_2$$

etc. etc.

$$d\,y_{\mathfrak{K}_1} = R \sin \alpha_1 \qquad d\,x_{\mathfrak{K}_1} = R \cos \alpha_1$$

$$d\,x_{\mathfrak{K}_2} = R \sin \alpha_2 \qquad d\,x_{\mathfrak{K}_2} = R \cos \alpha_2$$

etc. etc.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen α)—δ) ein, dividirt α) durch γ), β) durch δ), so findet man:

$$\frac{d\,y_F}{d\,y_{\mathfrak{K}}} = \frac{r \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \ldots}{R \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \ldots} = \frac{r}{R}.$$

Ebenso findet man:

$$d\,x_T : d\,x_{\mathfrak{K}} = \frac{r}{R}$$

also:

$$d\,y_F : d\,y_{\mathfrak{K}} = d\,x_F : d\,x_{\mathfrak{K}} = r : R = FM : \mathfrak{K}\mathfrak{M}$$

woraus die ähnliche Lage der Punkte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ gegen F und M folgt.

III. Ist nun P noch unbekannt, so geben uns diese Aehnlichkeitspunkte das Mittel an die Hand, P zu construiren. Man verbinde Q mit F, Fig. 46, und verlängere QF nach T_1, dann sind T_1 und $\mathfrak{T}_1$ ähnlich gelegen, — wie alle Punkte der beiden Peripherien, welche mit Q in grader Linie gelegen, (vergl. den Beweis zu II bezüglich der ähnlichen Lage der Punkte $\mathfrak{K}$ und k). — Zieht man weiter $T_1\,K\,T_2$, dann ist T_2 der Aehnlichkeitspunkt von Q, denn da T_1 mit $\mathfrak{T}_1$, und F mit $\mathfrak{K}$ ähnlich liegen, so sind die durch $\mathfrak{T}_1$ und F und durch T_1 und $\mathfrak{K}$ gezogenen Sehnen Aehnlichkeitssehnen, mithin deren Endpunkte Q und T_2 ähnlich gelegen. Zieht man nun noch den Durchmesser $T_2\,\mathfrak{M}\,T_3$, dann ist der ähnlich gelegene Durchmesser QP und der mit T_3 ähnlich gelegene Punkt P noch zu bestimmen.

Man verbinde Q mit T_3, dann ist $\angle\, T_1 T_2 T_3 = T_1 Q T_3$. Wegen der ähnlichen Lage von $\mathfrak{K}$, T_2, $\mathfrak{M}$ gegen F, Q und M ist weiter $\angle\, \mathfrak{K}, T_2 \mathfrak{M} = FQM$, folglich auch $T_1 Q T_3 = FQM$, also QMT_3 eine Gerade, mithin P ähnlich zu T_3 gelegen. Es ist somit:

$$\triangle\, \mathfrak{K}\,T_2\,T_3 \sim FQP$$

also

$$QP = \frac{T_2 T_3 \,.\, QF}{T_2 \mathfrak{K}}.$$

3) **Lösung des Problems für drei Strahlen.** Sind nur drei Visirstrahlen vorhanden, so entsteht ein fehlerzeigendes Dreieck, unsere Aufgabe lautet dann also:

In einem Dreieck ist ein Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten gefällten Lothe ein Minimum wird.

Bezeichnen h_a, h_b, h_c diese Lothe, so besteht die Bedingung

$$1)\ a h_a + b h_b + c h_c = 2 F$$

$$2)\ h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \text{minim.}$$

Durch Differentiation von 1) erhalten wir:

$$3)\ a\, d h_a + b\, d h_b + c\, d h_c = 0$$

und aus Gl. 2) infolge der Minimumsbedingung:

$$4)\ h_a\, d h_a + h_b\, d h_b + h_c\, d h_c = 0$$

und aus 3) die Correlatengleichung:

$$5)\ a k\, d h_a + b k\, d h_b + c k\, d h_c = 0$$

und wenn wir die Coofficienten der d h in 4) denen in 5) gleichsetzen:

$$5)\ h_a = a k, \quad h_b = b k, \quad h_c = c k.$$

Wären den Höhen h verschiedene Gewichte beizulegen, so würde das an der Gl. 1) und daher auch an Gl. 5) nichts ändern, dagegen geht 4) über in:

$$p_a h_a\, d h_a + p_b h_b\, d h_b + p_c h_c\, d h_c = 0$$

woraus wir analog mittelst 5) erhalten:

$$h_a = \frac{a}{p_a} k, \quad h_b = \frac{b}{p_b} k, \quad h_c = \frac{c}{p_c} k.$$

oder

$$7)\ h_a : h_b : h_c = \frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}. \text{*)}$$

Man hat daher ein dem fehlerzeigenden Dreiecke ähnliches Dreieck zu construiren, Fig. 47, derart, dass die correspondierenden Seiten beider Dreiecke unter sich bezüglich die parallelen Abstände $\frac{a}{p_a}$, $\frac{b}{p_b}$, $\frac{c}{p_c}$ erhalten, sodann die correspondierenden Ecken der Dreiecke mit einander zu verbinden. Die Verbindungslinien schneiden sich im gesuchten Punkte P, denn fällt man von P die Lothe h_a, h_b, h_c, so verhalten sich diese wie die Abstände der correspondierenden Dreiecksseiten, d. i. wie $\frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}$, wie Gl. 7) erfordert.

§ 25.

Einschneiden für zwei Punkte.

Es sind zwei neu zu bestimmende Punkte P_a und P_b durch gegenseitige Visur verbunden und sind weitere Visuren nach **gegebenen** Punkten vorhanden. Die Coordinaten der beiden Punkte P_a und P_b sind zu berechnen.

Zu einer **einmaligen** Bestimmung der beiden Punkte sind auf jedem derselben mindestens die Richtungen nach 2 gegebenen Punkten und dem **anderen** neu zu bestimmenden Punkte zu beobachten. Bezeichnen in Fig. 34 A und B die

---

*) Die pr. Verm.-Anw. setzt für a, b, c die Zeichen g_a, g_b, g_c und für $\frac{a}{p_a}$, $\frac{b}{p_b}$, $\frac{c}{p_c}$ die Zeichen m_a, m_b, m_c.

zu bestimmenden, C und S die gegebenen Punkte, so kann die Auflösung der Dreiecke A B C und A B S nach Formel (100) und (101) erfolgen, in welcher e als Entfernung der gegebenen Punkte von einander bekannt, und g die Unbekannte ist. Es ist diese Aufgabe bekannt unter dem Namen der **Hansen'schen Aufgabe** oder der **Aufgabe von der unzugänglichen Distanz.**

Hat man **überschüssige** Beobachtungen, so erfolgt die Berechnung der **genäherten Coordinaten** nach § 22, oder, wenn auch Vorwärtsbeobachtungen vorliegen, nach § 21. Sodann berechnet man in bekannter Weise für beide neu zu bestimmenden Punkte die genäherten Neigungen n_a und n_b. Letztere sind nun durch Aenderung der genäherten Coordinaten um die Beträge dy und dx um die Beträge dn_a, dn_b zu ändern. Diese Aenderungen sind für den Punkt P_a

1) für die Richtung von P_a nach P_b, da **beide** Endpunkte dieses Strahls eine Aenderung erleiden:

$$dn_b = a_b\,dx_a + b_b\,dy_a + c_a\,dx_a + d_a\,dy_b$$

2) für die übrigen den Punkt P_a bestimmenden Richtungen:

$$\begin{aligned} dn_1 &= a_1\,dx_a + b_1\,dy_a \\ dn_2 &= a_2\,dx_a + b_2\,dy_a \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen werden daher lauten, (unter Berücksichtigung des Orientirungsfehlers z, vergl. § 22):

$$\left.\begin{aligned} v_b &= a_b\,dx_a + b_b\,dy_a + c_a\,dx_b + d_a\,dy_b + z_a + f_b \\ v_1 &= a_1\,dx_a + b_1\,dy_a + f_1 \\ v_2 &= a_2\,dx_a + b_2\,dy_a + f_2 \\ &\text{etc.} \\ &\text{und analog für den Punkt } P_b \\ v_a &= a_a\,dx_b + b_a\,dy_b + c_b\,dx_a + d_b\,dy_a + z_b + f_a \\ v_1 &= \mathfrak{a}_1\,dx_b + \mathfrak{b}_1\,dy_b + \mathfrak{f}_1 \\ v_2 &= \mathfrak{a}_2\,dx_b + \mathfrak{b}_2\,dy_b + \mathfrak{f}_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Indem man diese Fehlergleichungen quadrirt, addirt, die Summe der Reihe nach nach den vier Unbekannten dy_a, dx_a, dy_b, dx_b differentiirt, die erhaltenen Differentialquotienten $= 0$ setzt, erhält man vier Normalgleichungen von der Form des § 9, 4), aus denen sich die vier Unbekannten nach den Formeln (84) und (85) ergeben.

§ 26.

Einschneiden für zwei Punkte mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.

Sind zwei neu zu bestimmende Punkte durch gegenseitige Visuren verbunden, so kann man deren nach § 24 darzustellenden Schnittfiguren durch gegenseitige Wechselverbesserungen berichtigen, ehe man in denselben die wahrscheinlichste Lage der gesuchten Punkte endgültig ermittelt. Das folgende einfache Beispiel wird das Verfahren verdeutlichen. Die Punkte P_a und P_b seien in der in Fig. 48 angedeuteten Weise bestimmt. Man berechne zunächst die genäherten Coordinaten für P_a, zu dessen Bestimmung, da P_b noch unbekannt, zunächst nur zwei Strahlen zu Gebote stehen, hierauf berechne man P_b, unter Einführung des **vorläufig** bestimmten

Punktes P_a als gegebenen Punkt, so dass also P_b aus **drei** Strahlen erhalten wird. Die Schnittfigur für P_b ist also ein fehlerzeigendes Dreieck, — Fig. 50, Schnittfigur für P_b —. In einem beliebigen Punkt P desjenigen Strahls a b, welcher die Visur nach P_a darstellt, trage man die zur Bestimmung des Punktes P_a benutzten Neigungen an, und erhält so die Schnittfigur für P_a. In der Schnittfigur für P_b bestimme man nach § 24, 3) die wahrscheinlichste Lage des Punktes P_b. Man erhält den Punkt p_b. Zieht man $p_b\, a' \parallel b\, a$, so erhält man auch in der Schnittfigur für P_a ein fehlerzeigendes Dreieck, in welchem man den Punkt p_a in gleicher Weise bestimmt. Die weitere Parallele $p_a\, b'$ verbessert das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für P_b und somit die Lage des Punktes p_b, welcher nach p_b' rücken wird. Ebenso verbessert die Parallele $p_b'\, a''$ das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für P_a. Der Punkt p_a rückt infolge dieser Verbesserung nach p_a'. Diese Wechselverbesserungen sind fortzusetzen, bis eine wesentliche Aenderung der Punkte p nicht mehr erzielt wird.

Es versteht sich von selbst, dass man zu der nach jedem Wechsel erforderlich werdenden Neubestimmung der Punkte p nicht immer wieder das Verfahren des § 24, 3) zu wiederholen braucht. Hat man in dem Dreieck A B C, Fig. 49, den Punkt p bestimmt, so findet man die dem Punkte p ähnlich gelegenen Punkte p′, p″ in den Dreiecken A B′ C′, A B″ C″ in der aus der Figur ohne Weiteres verständlichen Weise.

Das hier dargestellte Verfahren der schrittweisen Annäherung kann man durch folgendes direktere Verfahren umgestalten.

Gesetzt, man habe die Wechselnäherungen so lange fortgesetzt, bis eine weitere Verschiebung der Punkte p nicht mehr stattfindet, so wird man erkennen, dass die endgültig ermittelten Punkte p_a und p_b, Fig. 51, in den verlängerten Basen b b und a a der zuletzt erhaltenen fehlerzeigenden Dreiecke liegen müssen. Denn läge z. B. p_b über oder unter der verlängerten Basis b b, so würde eben nicht b b die durch die letzte Verbesserung erhaltene Basis des fehlerzeigenden Dreiecks D b b bilden, sondern die durch p_b zu b a gezogene Parallele. Entsprechend würde sich auch die Lage des Punktes p_a ändern, mithin auch die Parallele p_a a, also auch der Punkt p_b etc. Es würde also bei weiterer Fortsetzung des Verfahrens noch eine Verschiebung der Punkte p erzielt werden, was der Voraussetzung, dass das Verfahren zu Ende geführt sei, widerspricht.

Zieht man nun durch die Spitze A des fehlerzeigenden Dreiecks A B C zu a b die Parallele A E, ermittelt in den Dreiecken A B C und D E F nach § 24, 3) die Punkte P_a und P_b, bezeichnet deren Abstände von den Dreiecksbasen mit m und n, die Entfernung der Parallelen a a und b b von einander, d. i. den Abstand der den Punkten P_a und P_b ähnlich gelegenen Punkte p_a und p_b von den Basen ihrer endgültig verbesserten fehlerzeigenden Dreiecke mit x, die Höhen dieser letzteren Dreiecke mit h_a und h_b, die Höhe der Dreiecke A B C und D E F mit H, so ist:

$$1)\ x : h_a = m : H$$

$$2)\ x : h_b = n : H$$

also

$$3)\ h_a : h_b = n : m$$

und weiter:

$$4)\ h_a + h_b = H + x.$$

Setzt man $h_a = n\,y$, so ist nach 3) $h_b = m\,y$, und man erhält aus 1) und 4)

$$\text{I}\ x = \frac{m\,n\,y}{H}$$

$$\text{II}\ m\,y + n\,y = H + x.$$

Diese Gleichungen ergeben, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{H}{\frac{m+n}{m\,n} H - 1}.$$

Ist hieraus x gefunden, so theilt man H + x gemäss II nach dem Verhältniss m : n, um die Höhen h_a (= n y) und h_b (= m y) zu erhalten. Mit Hülfe dieser Höhen lassen sich die endgültigen fehlerzeigenden Dreiecke A a a und D b b construiren und werden in denselben die gesuchten Punkte p_a und p_b nach Anleitung der Fig. 49 erhalten. Eine Probe für die Richtigkeit der Construktion gewährt der Satz, dass diese Punkte in den verlängerten Basen b b und a a liegen müssen.

§ 27.

Wiederherstellung verlorener trigonometrischer Punkte durch Rückwärtsvisuren.

Man ermittelt zunächst die ungefähre Lage des verlorenen Punktes mit Hülfe des vorhandenen Kartenmaterials, bestimmt die Coordinaten dieses vorläufigen Punktes durch Rückwärtseinschneiden nach denselben gegebenen Punkten, welche früher zur Bestimmung des verlorenen Punktes gedient hatten. Aus den Coordinaten des vorläufigen Punktes und denen des verlorenen Punktes lässt sich die Excentricität e, (d. h. die Entfernung beider Punkte von einander), sowie der Winkel herleiten, den die Strecke e mit irgend einem der neu beobachteten Strahlen einschliesst, welche Elemente zur Wiederherstellung des gesuchten Punktes auf dem Felde genügen.

Bei der Coordinatenberechnung des **vorläufigen** Punktes können die bekannten Coordinaten des **verlorenen** Punktes als genäherte Coordinaten des ersteren Punktes, die bekannten Neigungen der von dem verlorenen Punkte nach gegebenen Punkten hin ausgehenden Strahlen als genäherte Neigungen benützt werden, so dass sich die Berechnung dieser Elemente, sowie die der Grössen a und b nach (117) erübrigt.

§ 28.

Einschalten.*)

Sind in Fig. 29 a und o gegebene, b, c, d, e neu zu bestimmende Punkte, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes ganz nach § 17. Die Basis a o ist bekannt, mithin können sämmtliche Dreiecke des Netzes, und sodann die Coordinaten nach § 40 berechnet werden. Dass sich auch der Fall der Fig. 28 hiernach behandeln lässt, ist bereits § 11 erwähnt.

Sind in Fig. 52 die Punkte 3, 4 und 1 gegeben, also die Seiten A und E bekannt, die Punkte 5, 6, 7, 8 neu zu bestimmen und zu dem Ende sämmtliche Winkel des Netzes gemessen, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes nach denselben Principien, nur geht die Bedingung zu 2) des § 17 über in

$$[\beta] = \angle \overset{\wedge}{\odot} 3 \overset{\wedge}{\odot} 4 \overset{\wedge}{\odot} 1 = \nu_4^3 - \nu_4^1, \tag{135}$$

während die Bedingung zu 3) desselben Paragraphen lautet:

$$\frac{E \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots}{A \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 \ldots} = 1 \tag{135a}$$

wie man leicht nach Analogie des § 10, Formel (89), findet.

*) Trigon. Formul. 16 der preussischen Verm.-Anw.

§ 29.

Einketten.*)

Das Dreiecksnetz ist so einzurichten, dass wenigstens zwei Punkte desselben mit gegebenen Punkten, △ 12 und △ 15, — Fig. 53 — zusammenfallen. Ausser den Dreieckswinkeln sind womöglich auf den **gegebenen** Punkten noch die Richtungen nach anderen **gegebenen** Punkten zu beobachten — (△ 15—△ 40 und △ 12—△ 41). Die Winkel haben dann folgenden Bedingungen zu genügen:

1) Die Summe der Winkel in den einzelnen Dreiecken muss 180^0 betragen.

2) In dem Zuge △ 40, △ 15, 13, 14, △ 12 △ 41 muss die Summe der gemessenen Winkel

$$\Sigma = (2\,n - 4)\,R - C$$

sein, worin C den Winkel bedeutet, welchen die Dreiecksseiten unter sich bilden, also $\qquad$ 1) $\Sigma = (2\,n - 4)\,R - (\nu_E - \nu_A)$.

Bezeichnen $f_1, f_2 \ldots f_n$ die gegen die Bedingung zu 1) sich ergebenden Widersprüche, (1), (2) . . . (n) die danach den Winkeln der Dreiecke 1, 2 . . . n zufallenden Verbesserungen, ferner f_s den Widerspruch gegen die Bedingung zu 2), (s) die den Polygonwinkeln danach zufallenden Verbesserungen, so ist, wenn m die Anzahl der Polygonpunkte, $z_1, z_2 \ldots z_n$ bezüglich die Anzahl der Winkel der Dreiecke 1, 2, . . n, welche zugleich in dem **Polygon** liegen, bezeichnen, — (so dass z. B. $z_2 = 1$, $z_3 = 2$), — so lautet die aus dem Polygonzuge sich ergebende Fehlergleichung: $\quad$ 2) $m\,(s) + z_1\,(1) + z_2\,(2) + \ldots + z_n\,(n) - f_s = 0.$ $\qquad$ (136)

Ferner ergeben sich aus den einzelnen **Dreiecken**, wenn $\frac{1}{p}$ (s) und $\frac{1}{q}$ (s) die Antheile sind, welche denjenigen Dreieckswinkeln, die zugleich dem Polygonzuge angehören, aus der Polygonverbesserung zufallen:

$$3)\left\{\begin{array}{l} 3\,(1) + \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}\right)(s) - f_1 = 0 \\ 3\,(2) + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}\right)(s) - f_2 - 0 \\ \qquad\text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (137)$$

Die Antheile $\frac{1}{p}$ (s) und $\frac{1}{q}$ (s) sind verschieden, je nach der Anzahl der die einzelnen Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel, da jedem Polygonwinkel nur die Verbesserung (s) zukommt, und diese zu gleichen Theilen auf die den Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel zu vertheilen ist. So ist z. B. im Dreiecke 3 der auf den Winkel β fallende Antheil der Verbesserung (s): $\frac{1}{p_3}(s) = \frac{1}{3}(s)$, weil (s) sich auf die Winkel β_1, β_2, β_3 vertheilt, dagegen ist in dem Dreiecke 3 der Antheil des Winkels α, d. i.: $\frac{1}{q}(s) = \frac{1}{2}(s)$, weil sich hier (s) nur auf die Winkel α_3 und β_4 vertheilt. Liegt nur **ein** Dreieckswinkel im Polygon, so ist entweder $\frac{1}{p}$ oder $\frac{1}{q} = 0$.

Die Auflösung der Gleichungen (136) und (137) erfolgt, indem man die Verbesserungen (1), (2) . . . . aus den Gleichungen (137) berechnet, sodann bezüglich

---

*) Trigon. Formul. 17 der pr. Verm.-Anw.

mit den Zahlen $z_1, z_2 \ldots$ multiplicirt und die Summe der erhaltenen Produkte in (136) einsetzt, wodurch sich (s) ergiebt. Wird dieses dann in (137) eingesetzt, so erhält man (1), (2) . . . (n).

Es ist gleichgültig, ob man den Polygonfehler f_s aus dem Polygon ♁ 40, ♁ 15, 14, 13, ♁ 12, ♁ 41, oder aus ♁ 40, ♁ 15, 10, 11, ♁ 12, ♁ 41 berechnet, denn wenn neben **einer** Polygonbedingung die Dreiecksbedingungen erfüllt sind, so ist auch die **andere** Polygonbedingung erfüllt.

In dem in unserer Figur dargestellten Beispiele sei der Fehler f_s aus dem Polygonzuge 40, 15, 14, 13, 12, 41 gebildet. An den m_1 (= 4) Winkeln desselben participiren:
1) der Anschlusswinkel auf ♁ 15
2) im Dreiecke 1 die Winkel β und γ
3) „ „ 2 „ „ β
4) „ „ 3 „ „ α und β
5) „ „ 4 „ „ α und β
6) der Abschlusswinkel auf ♁ 12.

Demnach ist:

$$z_1 = 2 \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{3}$$

$$z_2 = 1 \qquad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{q_2} = 0$$

$$z_3 = 2 \qquad \frac{1}{p_3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{q_3} = \frac{1}{2}$$

$$z_4 = 2 \qquad \frac{1}{p_4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{q_4} = \frac{1}{2}$$

Sei $f_1 = +28''$, $f_2 = -11$, $f_3 = +28$, $f_4 = -9$, $f_s = +19$, so lautet die Bedingungsgleichung (136)

$$\text{I} \quad 4\,(s) + 2\,(1) + (2) + 2\,(3) + 2\,(4) - 19 = 0$$

und die Bedingungsgleichungen (137)

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} &3\,(1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)(s) - 28 = 0 \\ &3\,(2) + \left(\frac{1}{3} + 0\right)(s) + 11 = 0 \\ &3\,(3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)(s) - 28 = 0 \\ &3\,(4) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(s) + \ \,9 = 0 \end{aligned} \right.$$

Löst man die Gleichungen II einzeln nach (1), (2), (3), (4) auf, multiplicirt mit z und addirt, so ergiebt sich:

$$\text{III} \left\{ \begin{aligned} 2\,(1) &= -\frac{5}{9}\,(s) + \frac{56}{3} \\ 1\,(2) &= -\frac{1}{9}\,(s) - \frac{11}{3} \\ 2\,(3) &= -\frac{5}{9}\,(s) + \frac{51}{3} \\ 2\,(4) &= -\frac{6}{9}\,(s) - \frac{18}{3} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Summe} = -\frac{17}{9}\,(s) + \frac{83}{3}.$$

Durch Einsetzung dieser Summe in II erhält man: $(s) = -4{,}1$ und durch Einsetzung von $(s) = -4{,}1$ in II oder III: $(1) = +5$, $(2) = -3{,}2$, $(3) = +10{,}5$, $(4) = -1{,}6$.

Es erhält nun jeder der Dreieckswinkel der Dreiecke 1, 2, 3, 4 bezüglich die Verbesserung (1), (2), (3), (4), ausserdem aber diejenigen Dreieckswinkel, welche zugleich Theile der Polygonwinkel bilden, die Verbesserungen $\frac{1}{p}(s)$ bezw. $\frac{1}{q}(s)$.

Nach Verbesserung der Winkel erfolgt die Berechnung der Dreiecksseiten in der Weise, dass zunächst die Anfangsseite $a = 1000$ angenommen wird. Hierauf erfolgt dann nach § 40 eine **vorläufige** Berechnung der Coordinatenunterschiede.*) Die Summe derselben dient zur Berechnung der **vorläufigen** Entfernung $\mathfrak{S}$ der **gegebenen** Punkte. Ist die bekannte **wirkliche** Entfernung dieser Punkte $= S$, so ist $q = \frac{S}{\mathfrak{S}}$ die Verhältnisszahl, mit welcher die **vorläufigen** Seiten der Dreiecke und die **vorläufigen** Coordinatenunterschiede zu multipliciren sind, um zu den **wahren** Werthen derselben zu gelangen.

Sind die An- und Abschlussneigungen auf den Punkten 12 und 15 nicht beobachtet, so beschränkt sich die Ausgleichung der Winkel nur auf die Vertheilung der Widersprüche $f_1, f_2 \ldots f_n$ in den einzelnen Dreiecken 1, 2 . . . n. Die Berechnung der vorläufigen Coordinatenunterschiede erfolgt unter Zugrundelegung einer blos durch Schätzung bestimmten Anfangsneigung. Ausser der vorläufigen Entfernung $\mathfrak{S}$ ist dann aus den vorläufigen Coordinatenunterschieden und den Coordinaten der **gegebenen** Punkte noch der Fehler der Anfangsneigung herzuleiten.**) Letztere ist dann um den erhaltenen Betrag zu verbessern, und die Berechnung, nachdem selbstverständlich auch die wahren Werthe der Dreiecksseiten durch Multiplication der vorläufigen Werthe mit q ermittelt worden, mit den so berichtigten Elementen zu wiederholen.

IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

§ 30.

Das Erdsphäroid.

Ein Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, heisst Sphäroid. Ein solcher Körper ist bekanntlich die Erde. Die Meridiane, d. i. die durch die Rotationsaxe der Erde gelegten Schnitte, sind also Ellipsen, und es können daher, wo es sich um die Aufnahme ganzer Länder handelt, die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden, bedürfen vielmehr gewisser Correktionen,***) welche ihrerseits die Kenntniss der Excentricität der Meridianellipse bezw. der Abplattung erfordern. Wir wollen daher

---

*) Im trigon. Form. 19 der pr. Verm.-Anw. Vom § 40 muss hier zum Verständniss des Folgenden vorweg Kenntniss genommen werden.

) Ist die aus den Coordinaten der gegebenen Punkte abgeleitete Neigung der diese Punkte verbindenden Geraden $= \nu$, die aus den **vorläufigen Coordinaten sich ergebende Neigung $= n$, $\left(\tang n = \frac{[\Delta \mathfrak{y}]}{[\Delta \mathfrak{x}]}\right)$, so ist $n - \nu$ der Fehler der Anfangsneigung.

***) Wenigstens einer strengen Berücksichtigung des mit der geographischen Breite wechselnden Krümmungsradius der Meridianellipse pp.