Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 21. Vorwärtseinschneiden (Berechnung der genäherten Coordinaten, Ausgleichungs- und Proberechnungen.)

Trigonometr. Formular 5.

Ziel-Punkte	Neigungen ν			Beobachtete Richtungen α			Unterschiede $\nu - \alpha$ Orientirungswinkel $0_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n}$			Orientirte Richtungen $\varphi = \alpha + 0_0$			Verbesserungen $v = \nu - \varphi$		Bemerkungen
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	+	—	
1	2			3			4			5			6		7
				Standpunkt △ 6.											Probe
△ 1	147	42	37	0	00	00	147	42	37	147	42	50		13	$[\alpha] = 03' 42''$
⧖ 4				9	26	44				157	09	34			$n\, o_0 = 17' 00''$
△ 5	182	46	47	35	04	02	147	42	45	182	46	52		5	$[\varphi] = 20' 42''$
△ 8	198	46	21	51	03	14	147	43	07	198	46	04	17		
⧖ 10				100	10	35				247	53	25			
△ 9	273	01	57	125	19	07	147	42	50	273	01	57	0		
					03	42		171	19		20	42	17	18	
				$o_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n} =$			147	42	50						

Diese endgültigen Neigungen wird man dann ebenfalls in Spalte 2 eintragen — (an den bisher leer gebliebenen Stellen bei ⧖ 4 und ⧖ 10) — wird die Differenzen v gegen die in Spalte 5 eingetragenen Neigungen, (orientirten Richtungen φ), bilden und so ein Urtheil über die Genauigkeit der aus den Beobachtungen α hervorgegangenen, zur Berechnung der Coordinaten benutzten Neigungen φ gewinnen. Nach der pr. Verm.-Anw. darf die Differenz $v = \nu - \varphi$ für Punkte IV. Ordnung nicht den Betrag 25″, für Beipunkte nicht den Betrag 35″ überschreiten.

Wie hier die auf △ 6 beobachteten Richtungen, sind natürlich, ehe die weiteren trigonometrischen Rechnungen vorgenommen werden können, die auf **sämmtlichen** gegebenen Punkten beobachteten Richtungen zu orientiren. Sobald dann ein neu bestimmter Punkt berechnet ist, kann derselbe für die Bestimmung weiterer Punkte als **gegebener** Punkt benutzt werden und sind zu dem Ende die auf demselben ausgeführten Beobachtungen sofort in gleicher Weise zu orientiren.

§ 21.

Vorwärtseinschneiden.

Nachdem alle Richtungen, welche auf gegebenen Punkten nach einem neu zu bestimmenden Punkte hin beobachtet sind, in der im vor. § angegebenen Weise orientirt worden, nachdem also sämmtliche von gegebenen Punkten aus nach dem zu bestimmenden Punkte hin ausgehenden Strahlen bezüglich ihrer Neigungen φ gegen die Abscissenaxe bekannt sind, kann zur Coordinatenberechnung geschritten werden. Gemäss § 9, 2) erfolgt zunächst die

Berechnung der genäherten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$.[*)]

Man wählt zu dem Ende unter den vorhandenen Beobachtungen zwei von den gegebenen Punkten P_a und P_b, Fig. 39, nach dem gesuchten Punkte P ausgehende Strahlen aus, welche sich in P möglichst annähernd rechtwinklig schneiden[**)],

*) In Abthl. I des trigon. Formulars 10 der pr. Verm.-Anw.

**) Wegen § 12.

und entnimmt deren Neigungen φ_a und φ_b aus Spalte 5 des im vor. § dargestellten Formulars. Die Winkel δ_a, δ_b und δ des Dreiecks $P_a\, P_b\, P$ ergeben sich aus den bekannten Neigungen, wie die Figur ergiebt:

$$\delta_a = \varphi_a - \nu_a^b, \quad \delta_b = \varphi_a - \varphi_b \pm 180^0, \quad \delta = \varphi_b - \varphi_a. \tag{110}$$

Es ist nun, wenn man die Coordinaten der gegebenen Punkte P_a und P_b mit y_a, x_a, y_b, x_b bezeichnet, im übrigen aber die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$a = s\,\frac{\sin\delta_a}{\sin\delta} = \frac{y_b - y_a}{\sin\nu_a^b}\cdot\frac{\sin\delta_a}{\sin\delta}$$

$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta\,\sin\nu_a^b}$$

und analog auch

$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{x_b - x_a}{\sin\delta\,\cos\nu_a^b}.$$

Setzt man
$$\frac{a}{\sin\delta_a} = \frac{b}{\sin\delta_b} = m \tag{111}$$

so ist
$$m = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta\,\sin\nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\sin\delta\,\cos\nu_a^b}. \tag{111a}$$

Ferner ist

$$\triangle y_a = a\sin\varphi_a \qquad \triangle x_a = a\cos\varphi_a$$
$$\triangle y_a = b\sin\varphi_b \qquad \triangle x_b = b\cos\varphi_b$$

also nach (111)

$$\left.\begin{aligned}\triangle y_a &= m\sin\delta_a\sin\varphi_a \qquad & \triangle x_a &= m\sin\delta_a\cos\varphi_a\\ \triangle y_a &= m\sin\delta_b\sin\varphi_b \qquad & \triangle x_a &= m\sin\delta_b\cos\varphi_b\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Endlich ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{y} &= y_a + \triangle y_a \qquad & \mathfrak{x} &= x_a + \triangle x_a\\ &= y_b + \triangle y_b \qquad & &= x_b + \triangle x_b\end{aligned} \tag{113}$$

Aufstellung der Fehlergleichungen: Wir haben nun weiter mit Hülfe der genäherten Werthe $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die genäherten Neigungen n abzuleiten, — vergl. § 9, 2) — und mit den beobachteten Neigungen φ zu vergleichen, und benutzen dazu die Formel (105)

$$\operatorname{tang} n = \frac{\triangle\mathfrak{y}}{\triangle\mathfrak{x}} \tag{114}$$

worin $\triangle\mathfrak{y} = y - \mathfrak{y}$, $\triangle x = x - \mathfrak{x}$. Diese Formel liefert uns die Neigungen $n_P^{P_1}$, $n_P^{P_2}$ etc., welche, um mit den Neigungen $\varphi_{P_1}^P$, $\varphi_{P_2}^P$ etc. verglichen werden zu können, um 180° zu ändern sind. Wir erhalten somit, — vergl. (75) — :

$$\left.\begin{aligned}f_1 &= n_1 - (\varphi_1 \pm \pi)\\ f_2 &= n_2 - (\varphi_2 \pm \pi)\end{aligned}\right\} \tag{115}$$
etc.

Es kommt nun weiter darauf an, den Punkt P durch Aenderung seiner Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ so zu verschieben, dass, wenn wir die Werthe, welche die Neigungen n durch diese Verbesserung gemäss (114) erhalten, mit ν bezeichnen, und

$$\nu_1 - (\varphi_1 \pm \pi) = v_1$$
$$\nu_2 - (\varphi_2 \pm \pi) = v_2$$
etc.

setzen, die Summe der Quadrate der einzelnen v zum Minimum wird. Bezeichnen wir die uns noch unbekannten Coordinatenverbesserungen, durch welche dieser Bedingung genügt wird, mit $\delta \mathfrak{y}$ und $\delta \mathfrak{x}$, die durch diese Verbesserungen in den einzelnen Neigungen n hervorgebrachten Aenderungen mit δn, so ist gemäss (76)

$$\left.\begin{aligned} \delta n_1 &= a_1\, \delta \mathfrak{x} + b_1\, \delta \mathfrak{y} \\ \delta n_2 &= a_2\, \delta \mathfrak{x} + b_2\, \delta \mathfrak{y} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

worin a und b die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\operatorname{tang} n = \frac{\triangle \mathfrak{y}}{\triangle \mathfrak{x}}$ nach $\triangle \mathfrak{y}$ und $\triangle \mathfrak{x}$ bezeichnen. Indem wir diese Differentiation (nach (24) und (25)) ausführen und die partiellen Differentiale nach (29) addiren, erhalten wir:

$$d \operatorname{tang} n = -\frac{\triangle \mathfrak{y}}{\triangle \mathfrak{x}^2}\, d(\triangle x) + \frac{d(\triangle \mathfrak{y})}{\triangle \mathfrak{x}}$$

da $\triangle \mathfrak{y} = y - \mathfrak{y}$, $\triangle x = x - \mathfrak{x}$, worin y und x, also die Coordinaten der gegebenen Punkte, Constante, und nur $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ veränderlich sind, so ist $d(\triangle \mathfrak{y}) = -\delta \mathfrak{y}$, $d(\triangle \mathfrak{x}) = -\delta \mathfrak{x}$, und wir erhalten somit nach (41):

$$\frac{\delta n}{\cos^2 n} = \frac{\triangle \mathfrak{y}}{\triangle \mathfrak{x}^2} \cdot \delta \mathfrak{x} - \frac{1}{\triangle \mathfrak{x}} \cdot \delta \mathfrak{y}$$

$$\delta n = \frac{\triangle \mathfrak{y} \cos^2 n\, \delta \mathfrak{x}}{\triangle \mathfrak{x}^2} - \frac{\cos^2 n}{\triangle \mathfrak{x}}\, \delta \mathfrak{y}.$$

Bezeichnen nun $s_1, s_2 \ldots$ die Entfernungen des Punktes P von den gegebenen Punkten $P_1, P_2 \ldots$, so ist: $\cos n = \frac{\triangle \mathfrak{x}}{s}$, also $\frac{\cos n}{\triangle \mathfrak{x}} = \frac{1}{s}$, und ferner $\frac{\triangle \mathfrak{y}}{\triangle \mathfrak{x}} = \operatorname{tang} n = \frac{\sin n}{\cos n}$, also

$$\delta n = \frac{1}{s} \sin n\, \delta \mathfrak{x} - \frac{1}{s} \cos n\, \delta \mathfrak{y}$$

wodurch wir δn in analytischem Winkelmasse erhalten. In Sekunden ausgedrückt ist also:

$$\delta n = \varrho'' \frac{\sin n}{s}\, \delta \mathfrak{x} - \varrho'' \frac{\cos n}{s}\, \delta \mathfrak{y}.$$

Demnach ist in (116)

$$a = \varrho'' \frac{\sin n}{s}, \quad b = -\varrho'' \frac{\cos n}{s} \text{ *)} \tag{117}$$

---

*) Ein anderer Ausdruck für a und b ergiebt sich wie folgt: Da $a\, \delta x$ die in Sekunden ausgedrückte Aenderung der Neigung n vorstellt, welche durch Aenderung von $\triangle \mathfrak{x}$ um den Betrag δx entsteht, so ist a nichts Anderes, als die Aenderung von n, welche einer Aenderung von $\triangle \mathfrak{x}$ um 1 (1 m) entspricht. Durch partielle Differentiation der Gleichung $\log \operatorname{tang} n = \log \triangle \mathfrak{y} - \log \triangle \mathfrak{x}$ nach $\triangle \mathfrak{x}$ erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen unbeachtet lassen, $d \log \operatorname{tang} n = d \log \triangle \mathfrak{x}$. Ist nun die Aenderung von $\triangle \mathfrak{x} = 1$, so kann die zugehörige Aenderung von $\log \triangle \mathfrak{x}$, (also $d \log \triangle \mathfrak{x}$) durch Bildung der Tafeldifferenz erhalten werden. Sie sei $= D_x$. Bezeichnet ferner $D_{\operatorname{tang} n}$ die Tafeldifferenz des $\log \operatorname{tang} n$ für $1''$, so ist die Aenderung des $\log \operatorname{tang} n$ für $a'' = a\, D_{\operatorname{tang} n}$, und es ist nach Obigen: $a\, D_{\operatorname{tang} n} = D_x$, also $a = \frac{D_x}{D_{\operatorname{tang} n}}$. Analog findet man $b = \frac{D_y}{D_{\operatorname{tang} n}}$. Es erhält nun, wie aus (117) erhellen wird, a das Vorzeichen von $\triangle \mathfrak{y}$, b das umgekehrte Vorzeichen von $\triangle \mathfrak{x}$.

Graphisch kann man a und b wie folgt finden: Man trägt die Punkte P und P_1 mittelst ihrer Coordinaten $\mathfrak{y}$ und y_1, $\mathfrak{x}$ und x_1 auf, ermittelt nach der Zeichnung die Länge s, ändert nun die Abscisse $\mathfrak{x}$ um 1, fällt von dem so erhaltenen Punkte ein Loth $= h_x$ auf den Strahl s, so ist $\frac{h_x}{s} \varrho'' = a$. Entsprechend

Die geänderten Neigungen $\nu = \mathrm{n} + \delta\,\mathrm{n}$ sind nun nach (116)

$$\nu = \mathrm{n} + \mathrm{a}\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}\,\delta\,\mathfrak{y}. \tag{118}$$

Vergleichen wir diese endgültigen Neigungen nach Anleitung des § 9 mit den beobachteten Neigungen φ, so kommen die Verbesserungen v zum Vorschein. Wir erhalten die Fehlergleichungen (77):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= \mathrm{a}_1\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}_1\,\delta\,\mathfrak{y} + \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{v}_2 &= \mathrm{a}_2\,\delta\,\mathfrak{x} + \mathrm{b}_2\,\delta\,\mathfrak{y} + \mathrm{f}_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

durch welche wir durch die Minimumsbedingung $[\mathrm{v\,v}] = \text{minim.}$ zu den Normalgleichungen (79) gelangen, aus denen sich $\delta\,\mathrm{y}$ und $\delta\,\mathrm{x}$ nach § 9, 3) ergeben.

Neben den aus Gl. (82) und (83) sich ergebenden Rechenproben verschaffen wir uns eine weitere, die gesammten Ausgleichungsrechnungen controllirende Probe, indem wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\mathfrak{y} + \delta\,\mathfrak{y}$, $\mathrm{x} + \delta\,\mathfrak{x}$ die Neigungen ν ableiten und die Verbesserungen $\mathrm{v} = \nu - (\varphi \pm \pi)$ bilden, welche mit den aus (119) berechneten Werthen v übereinstimmen müssen.*)

Der mittlere Fehler der Beobachtungen ist nach (87)

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{[\mathrm{v\,v}]}{\mathrm{n} - 2}}.$$

§ 22.

Rückwärtseinschneiden.**)

Sind zur Beobachtung eines Punktes nur Beobachtungen auf diesem Punkte selbst ausgeführt, so erfolgt die Berechnung der genäherten Coordinaten nach folgenden Formeln:

Gegeben seien die Punkte $\mathrm{P_a}$, $\mathrm{P_m}$, $\mathrm{P_b}$, Fig. 40, gesucht der Punkt P, auf welchem die Richtungen nach den gegebenen Punkten, also die Winkel α und β gemessen sind. Wir finden zunächst die Neigungen $\nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}$ und $\nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}$ auf bekannte Weise nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_a}}{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_a}} \\ \operatorname{tang} \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_b}}{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_b}} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

sowie die Längen a und b nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_a}}{\sin \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_a}}{\cos \nu_{\mathrm{a}}^{\mathrm{m}}} \\ \mathrm{b} &= \frac{\mathrm{y_m} - \mathrm{y_b}}{\sin \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{x_m} - \mathrm{x_b}}{\cos \nu_{\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}}. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

---

erhält man durch Aenderung der Ordinate $\mathfrak{y}$ um 1, und durch Fällen des Lothes $\mathrm{h_y} : \frac{\mathrm{h_y}}{\mathrm{s}}\,\varrho'' = \mathrm{b}$. Die Aenderungen der Coordinaten y und $\mathfrak{x}$ um 1 m müssen in grossem, das Abgreifen von Centimetern gestattenden Massstab ausgeführt werden. Sind $\mathrm{h_x}$ und $\mathrm{h_y}$ in cm, s in Metern ausgedrückt, und setzt man $\frac{\varrho''}{100} = \mathrm{k}$, so ist $\mathrm{a} = \mathrm{h_x}\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$, $\mathrm{b} = \mathrm{h_y}\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$, worin $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

*) Nach der pr. Verm.-Anw. erhalten die aus (119) gebildeten Werthe die Bezeichnung u. Die Probe lautet dann: u soll = v sein.

**) Trigon. Formul. 11 der preussischen Verm.-Anw.