Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 22. Rückwärtseinschneiden (Berechnung der genäherten Coordinaten, Ausgleichungs- und Proberechnung.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Die geänderten Neigungen $\nu = n + \delta n$ sind nun nach (116)

$$\nu = n + a\,\delta\mathfrak{x} + b\,\delta\mathfrak{y}. \tag{118}$$

Vergleichen wir diese endgültigen Neigungen nach Anleitung des § 9 mit den beobachteten Neigungen φ, so kommen die Verbesserungen v zum Vorschein. Wir erhalten die Fehlergleichungen (77):

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,\delta\mathfrak{x} + b_1\,\delta\mathfrak{y} + f_1 \\ v_2 &= a_2\,\delta\mathfrak{x} + b_2\,\delta\mathfrak{y} + f_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

durch welche wir durch die Minimumsbedingung $[v\,v] = \text{minim.}$ zu den Normalgleichungen (79) gelangen, aus denen sich δy und δx nach § 9, 3) ergeben.

Neben den aus Gl. (82) und (83) sich ergebenden Rechenproben verschaffen wir uns eine weitere, die gesammten Ausgleichungsrechnungen controllirende Probe, indem wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\mathfrak{y} + \delta\mathfrak{y}$, $x + \delta\mathfrak{x}$ die Neigungen ν ableiten und die Verbesserungen $v = \nu - (\varphi \pm \pi)$ bilden, welche mit den aus (119) berechneten Werthen v übereinstimmen müssen.*)

Der mittlere Fehler der Beobachtungen ist nach (87)

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}}.$$

§ 22.

Rückwärtseinschneiden.**)

Sind zur Beobachtung eines Punktes nur Beobachtungen auf diesem Punkte selbst ausgeführt, so erfolgt die Berechnung der genäherten Coordinaten nach folgenden Formeln:

Gegeben seien die Punkte P_a, P_m, P_b, Fig. 40, gesucht der Punkt P, auf welchem die Richtungen nach den gegebenen Punkten, also die Winkel α und β gemessen sind. Wir finden zunächst die Neigungen ν_a^m und ν_b^m auf bekannte Weise nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \nu_a^m &= \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \\ \operatorname{tang} \nu_b^m &= \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

sowie die Längen a und b nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{y_m - y_a}{\sin \nu_a^m} = \frac{x_m - x_a}{\cos \nu_a^m} \\ b &= \frac{y_m - y_b}{\sin \nu_b^m} = \frac{x_m - x_b}{\cos \nu_b^m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

---

erhält man durch Aenderung der Ordinate $\mathfrak{y}$ um 1, und durch Fällen des Lothes $h_y : \frac{h_y}{s}\,\varrho'' = b$. Die Aenderungen der Coordinaten y und $\mathfrak{x}$ um 1 m müssen in grossem, das Abgreifen von Centimetern gestattenden Massstab ausgeführt werden. Sind h_x und h_y in cm, s in Metern ausgedrückt, und setzt man $\frac{\varrho''}{100} = k$, so ist $a = h_x\,\frac{k}{s}$, $b = h_y\,\frac{k}{s}$, worin $\frac{k}{s}$ aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

*) Nach der pr. Verm.-Anw. erhalten die aus (119) gebildeten Werthe die Bezeichnung u. Die Probe lautet dann: u soll = v sein.

**) Trigon. Formul. 11 der preussischen Verm.-Anw.

Ferner kennen wir:

$$\gamma + \delta = \nu_a^m = \nu_b^m. \tag{122}$$

Setzen wir $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\,\sigma$, so ist:

$$\varphi + \psi = \pi - \sigma \tag{123}$$

und es kommt uns nun zunächst darauf an, $\varphi - \psi$ zu berechnen, um mit Hülfe von (123) zu den einzelnen Winkeln φ und ψ zu gelangen. — Nach dem Sinussatze ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{s_m \sin\alpha}{a} \\ \sin\psi &= \frac{s_m \sin\beta}{b} \end{aligned}\right\} \tag{123a}$$

folglich

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\dfrac{s_m \sin\alpha}{a} + \dfrac{s_m \sin\beta}{b}}{\dfrac{s_m \sin\alpha}{a} - \dfrac{s_m \sin\beta}{b}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{a} + \dfrac{\sin\beta}{b}}{\dfrac{\sin\alpha}{a} - \dfrac{\sin\beta}{b}}$$

$$= \frac{b\sin\alpha + a\sin\beta}{b\sin\alpha - a\sin\beta}.$$

Hieraus erhalten wir nach einer bekannten goniometrischen Formel, wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch $b \sin\alpha$ dividiren:

$$\frac{2\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2}\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\dfrac{\varphi+\psi}{2}\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{1 + \dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1 - \dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}$$

oder wenn wir

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} = \operatorname{tang}\mu \tag{124}$$

setzen:

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{1+\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}\mu}$$

$$\cot\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu\right)}{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi+\psi}{2}}$$

oder auch

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu\right)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\,\cot\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right). \tag{125}$$

Als Rechenprobe ergiebt sich aus (123a)

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}. \tag{126}$$

Endlich ist nun:

$$\triangle y_a = s_a \sin\nu_a$$

oder wenn wir s_a durch den Sinussatz ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}\triangle y_a &= \frac{a \sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\sin\nu_a \\ \text{und analog} \\ \triangle x_a &= \frac{a \sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\cos\nu_a \\ \triangle y_b &= \frac{b \sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\sin\nu_b \\ \triangle x_b &= \frac{b \sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\cos\nu_b\end{aligned}\right\} \quad (126a)$$

Die Lage des Punktes P bleibt unbestimmt, wenn derselbe in der Peripherie des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises liegt, in welchem Falle α und β Peripheriewinkel dieses Kreises werden, daher für jeden beliebigen Punkt in der Peripherie gleich bleiben. Hierauf hat man bei der Auswahl der drei zur Berechnung der genäherten Coordinaten zu benutzenden gegebenen Punkte zu achten.

Aufstellung der Fehlergleichungen: Wir berechnen zunächst mit Hülfe der genäherten Coordinaten, welche sich analog (113) aus den Formeln (126) ergeben, die genäherten Neigungen n_1, n_2 . . . nach (114). Ziehen wir von jeder einzelnen der Neigungen n_1, n_2 . . . den Winkel $o_0 = n_1 - \alpha_1$*) ab, so erhalten wir die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}w_1 &= n_1 - (n_1 - \alpha_1) = n_1 - o_0 = \alpha_1 \\ w_2 &= n_2 - (n_1 - \alpha_1) = n_2 - o_0 \\ &\vdots \\ w_n &= n_n - (n_1 - \alpha_1) = n_n - o_0\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

Die Werthe w müssten nun, wenn sowohl die genäherten Neigungen n als die Beobachtungen α fehlerlos wären, mit den Beobachtungen α übereinstimmen, wie sofort aus Fig. 38 klar wird, wenn man sich in dieser die Bezeichnungen n_1, n_2 . . . statt ν_1 ν_2 . . . geschrieben denkt. In Wahrheit ergeben sich aber die Widersprüche:

$$\left.\begin{aligned}f_1 &= w_1 - \alpha_1 \\ f_2 &= w_2 - \alpha_2 \\ &\vdots \\ f_n &= w_n - \alpha_n\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

und es kommt nun darauf an, die genäherten Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ um die kleinen Beträge d y und d x so zu verbessern, dass die Summe der Quadrate der dann noch übrig bleibenden Widersprüche, welche wir jetzt mit v bezeichnen, ein Minimum werde.

Durch die Aenderungen der Coordinaten um d y und d x werden sich die Neigungen n um d n ändern, und es ist

$$d\,n = a\,d\,x + b\,d\,y$$

worin a und b nach Formel (117) zu berechnen sind. Die endgültigen Neigungen ν ergeben sich somit:

$$\left.\begin{aligned}\nu_1 &= n_1 + a_1\,d\,x + b_1\,d\,y \\ \nu_2 &= n_2 + a_2\,d\,x + b_2\,d\,y \\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

*) Sind die Beobachtungen α auf die Anfangsrichtung reducirt, ist also $\alpha_1 = 0$, so ist $o_0 = n_1$.

Hieraus erhalten wir, indem wir wieder von den Neigungen ν den Winkel $0'_0 = \nu_1 - \alpha_1$ abziehen, die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 + a_1\, d\,x + b_1\, d\,y - o'_0 &= w'_1 \\ \mathfrak{n}_2 - a_2\, d\,x + b_2\, d\,y - o'_0 &= w'_2 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

die nun noch übrig bleibenden Fehler sind analog (128)

$$\begin{aligned} v_1 &= w'_1 - \alpha_1 \\ v_2 &= w'_2 - \alpha_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder nach (130), wenn wir das uns noch unbekannte $o'_0 = o_0 - z$*) setzen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathfrak{n}_1 + a_1\, d\,x + b_1\, d\,y - o_0 + z - \alpha_1 \\ v_2 &= \mathfrak{n}_2 + a_2\, d\,x + b_2\, d\,y - o_0 + z - \alpha_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder da nach (127) $\mathfrak{n}_1 - o_0 = w_1$ und nach (128) $w_1 - \alpha_1 = \mathfrak{f}_1$, also $\mathfrak{n}_1 - o_0 - \alpha_1 = \mathfrak{f}_1$ und analog $\mathfrak{n}_2 - 0_0 - \alpha_2 = \mathfrak{f}_2$ etc.:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \mathfrak{f}_1 + z + a_1\, d\,x + b_1\, d\,y \\ v_2 &= \mathfrak{f}_2 + z + a_2\, d\,x + b_2\, d\,y \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (131)$$

Um z zu eliminiren, bilden wir aus diesen Gleichungen das arithmetische Mittel:

$$\frac{[v]}{n} = \frac{[\mathfrak{f}]}{n} + z + \frac{[a]}{n}\, d\,x + \frac{[b]}{n}\, d\,y$$

welches wir mit einfacheren Zeichen schreiben wollen:

$$v_m = \mathfrak{f}_m + z + a_m\, d\,x + b_m\, d\,y.$$

Ziehen wir diese Gleichung von den einzelnen Fehlergleichungen (131) ab, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_m &= \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_m + (a_1 - a_m)\, d\,x + (b_1 - b_m)\, d\,y \\ v_2 - v_m &= \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_m + (a_2 - a_m)\, d\,x + (b_2 - b_m)\, d\,y \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}{}^{**)} \qquad (131a)$$

welche Gleichungen wir, um wieder auf die Form der Gleichungen (77) zu gelangen, unter Einführung einfacherer Zeichen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{a}_1\, d\,x + \mathfrak{b}_1\, d\,y \\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{a}_2\, d\,x + \mathfrak{b}_2\, d\,y \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

Die Bedingung $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = \text{minim.}$ führt uns dann wieder zu den Normalgleichungen (79), deren Auflösung nach § 9, 3) erfolgt.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen ergiebt sich nach (87), da **drei** Beobachtungen zu einer einmaligen Bestimmung des Punktes P gehören:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-3}}.$$

---

*) Statt $o'_0 = \nu_1 - \alpha_1$ zu bilden, könnte man auch $o'_0 = \nu_2 - \alpha_2$, oder $o'_0 = \nu_3 - \alpha_3$ etc. bilden. Alle diese Werthe für den Orientirungswinkel o_0 werden etwas differiren und wir müssten eigentlich das arithmetische Mittel o_m statt o'_0 einsetzen. Indem wir $o'_0 = o_0 - z$ statt $o_m = o_0 - z$ setzen, stellen wir in z zugleich den Fehler des Orientirungswinkels o'_0 dar. Die uns noch Unbekannte z ist nun zu eliminiren, wie dies in Folgendem geschieht.

**) Die Bildung der Mittel a_m, b_m, $\mathfrak{f}_m$ und der Werthe $a - a_m$, $b - b_m$, $\mathfrak{f} - \mathfrak{f}_m$ erfolgt in Abth. 3 des trigon. Formul. 11 der pr. Verm.-Anw. Als Rechenprobe hat man gemäss (63) $[a - a_m] = 0$, $[b - b_m] = 0$, $[\mathfrak{f} - \mathfrak{f}_m] = 0$.

Als **Rechenprobe** leiten wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten $\mathfrak{y} + d\,y$, $\mathfrak{x} + d\,x$ die endgültigen Neigungen ν ab, bilden die Grössen $v_1 = (\nu_1 - o_0) - \alpha_1$, $v_2 = (\nu_2 - o_0) - \alpha_2$ etc., ziehen das Mittel $\frac{[v]}{n} = v_m$ von den einzelnen Grössen v ab*), so müssen die so erhaltenen Werthe mit den aus (132) sich ergebenden Werthen v übereinstimmen.

§ 23.

Das combinirte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21, die der genäherten Neigungen n und der Werthe a und b nach (114) bis (117). Die Fehlergleichungen für die Vorwärtsbeobachtungen werden nach § 21, für die Rückwärtsbeobachtungen nach § 22 angesetzt, d. h. es werden für die Rückwärtsbeobachtungen die Grössen a, b und f um ihre arithmetischen Mittel a_m, b_m, f_m gekürzt, dann aber die Quadrate $a_1 a_1$, $a_2 a_2$ . . . ., $b_1 b_1$, $b_2 b_2$ . . ., und die Produkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ . . . ., $a_1 f_1$, $a_2 f_2$ . . . ., $b_1 f_1$, $b_2 f_2$ . . . . für die Rückwärts- und Vorwärtsrichtungen je in **einer** Summe vereinigt, um die Coofficienten der Normalgleichungen [a a], [b b] etc. zu erhalten.

§ 24.

Einschneiden mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.**)

1) Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21. Sind Rückwärtsrichtungen vorhanden, so werden diese nach den Vorwärtsrichtungen orientirt, welche Rechnungsoperation ganz nach dem Beispiel des § 20 erfolgt. Es werden nämlich die aus dem trigon. Formular 5 des § 20 entnommenen orientirten Vorwärtsrichtungen φ in ein ähnliches Formular eingetragen, diesen die entsprechenden Rückwärtsrichtungen α gegenübergestellt, der Orientirungswinkel $o_0 = \frac{[n - \alpha]}{n}$ gebildet und hierzu die Beobachtungen α der Reihe nach addirt. Die so erhaltenen Neigungen ψ werden gegen die durch die Vorwärtsbeobachtungen erhaltenen Neigungen φ etwas differiren, und wird daher das arithmetische Mittel $\mu = \frac{\varphi + \psi}{2}$ in die folgenden Rechnungen eingeführt.

Je weniger Vorwärtsrichtungen vorliegen, um so unsicherer wird die Orientirung der Rückwärtsrichtungen, mit um so grösserer Vorsicht muss das im Folgenden beschriebene, sonst aber sehr gute Resultate liefernde Verfahren angewendet werden.

Seien nun die genäherten Coordinaten des gesuchten Punktes $P_1 = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus irgend zwei beobachteten Richtungen berechnet worden, und denken wir uns zur Abscissenaxe in der Entfernung $\mathfrak{y}$ eine Parallele gezogen, Fig. 41, so können wir den Punkt p, in welchem diese Parallele von der auf dem Punkte P_1 beobachteten Neigung μ_1 geschnitten wird, berechnen. Bezeichnen $x_1\, y_1$ die Coordinaten des gegebenen Punktes P_1, $\mathfrak{x}_1$ die gesuchte Abscisse des Punktes p, so ergiebt sich aus der Figur ohne Weiteres:

*) Behufs Elimination des in der Anmerkung auf Seite 74 gedachten Orientirungsfehlers.

**) Trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.